Innehåll

Förord

Kom ihåg
- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan
- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Uppgifter relevanta för kursen Ma4

Följande uppgifter är lämpliga för övning till kursen Ma4:

Utan miniräknare	2	3	4	7	8	9
Med	10	11	14	16	17	

Del 1 # 2 (2/0) Förenkla

Förenkla $(5+i)^2$. Använd FORMELSAMLINGEN, där finns kvadreringsregler.

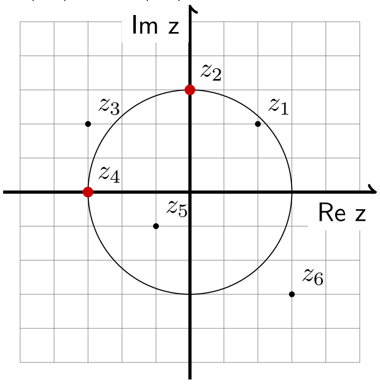
Regler		
	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	
		$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
		$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\begin{aligned} (5+i)^2 &= 5^2 + 2\cdot 5\cdot i + \underbrace{i^2}_{-1} \\ &= 24 + 10\,i \end{aligned}$$

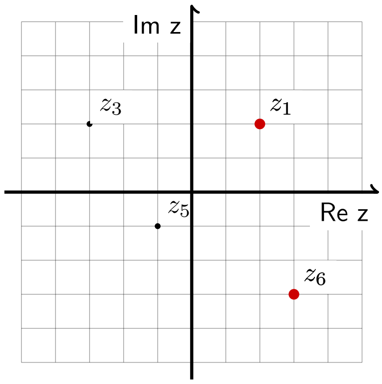
Svar $24 + 10\,i$

Del 1 # 3 (3/0) Komplexa tal i talplanet

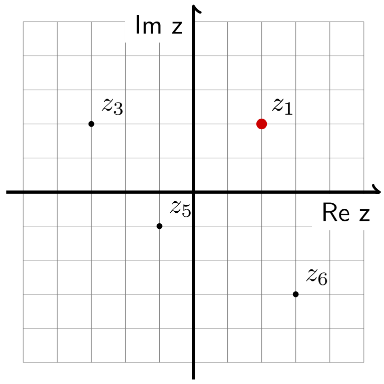
$|z_2| = 3 \quad |z_4| = 3$



Re $z_1 > 0$ Re $z_6 > 0$



Arg $z_1 = 45°$



Del 1 # 4 (2/0) Ekvation

Ekvationen är

$$4\,z + 3\,\bar{z} = 28 + 5\,i.$$

Ansätt

$$z = a + b\,i.$$

Ekvation blir

$$\begin{aligned} 4\,(a + b\,i) + 3\,(a - b\,i) &= 28 + 5\,i \\ 7\,a + b\,i &= 28 + 5\,i \end{aligned}$$

med lösningen

$$\begin{aligned} a &= \frac{28}{7} = 4 \\ b &= 5 \end{aligned}$$

Svar $z = 4 + 5\,i.$

Del 1 # 7 (0/3) Ekvationen $z^n = a$

Lös ekvationen $2\,z^3 = -54$. Börja med att städa

$$z^3 = -27.$$

Strategi: Använd polär form för ekvationens höger- och vänsterled. Ansätt

$$z = r\,(\cos\nu + i\,\sin\nu).$$

deMoivres formel ger

$$z^3 = r^3\,(\cos 3\nu + i\,\sin 3\nu).$$

Ekvationens högerled på polär form är

$$-27 = 27\,[\cos(180^\circ) + i\sin(180^\circ)]\,.$$

Vi får en likhet mellan två komplexa tal på polär form

$$r^3\,(\cos 3\nu + i\,\sin 3\nu) = 27\,[\cos(180^\circ) + i\sin(180^\circ)]\,.$$

Två komplexa tal på polär form är lika om belopp och argument är lika

$$r^3 = 27$$
$$3\nu = 180^\circ + n\cdot 360^\circ.$$

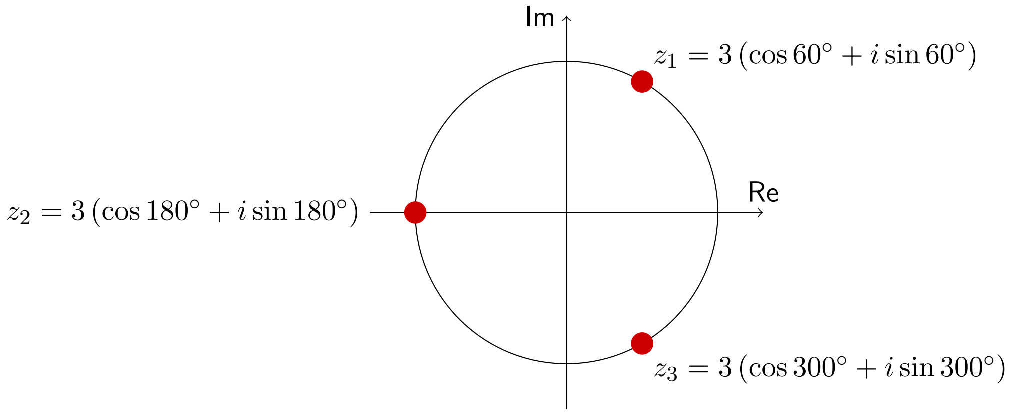
Lösningen är

$$r = 27^{1/3} = 3$$
$$\nu = \frac{180^\circ}{3} + n\,\frac{360^\circ}{3} = 60^\circ + n\,120^\circ.$$

De tre olika lösningarna är

$$\nu_1 = 60^\circ$$
$$\nu_2 = 180^\circ$$
$$\nu_3 = 300^\circ.$$

Svar De tre lösningarna finns i figuren nedan.



Del 1 # 8 (0/2) Komplexa tal

Bestäm det reella talet x så att

$$1 = \mathsf{Re}\left(\frac{10}{x+4\,i}\right).$$

Trixet för att få bort imaginärdelen i nämnaren är att förlänga med konjugatet.

$$\begin{aligned}
1 &= \mathsf{Re}\left(\frac{10\,x-40\,i}{(x+4\,i)(x-4\,i)}\right)\\
1 &= \mathsf{Re}\left(\frac{10\,x{-}40\,i}{x^2+16}\right)\\
1 &= \left(\frac{10\,x}{x^2+16}\right)\\
x^2+16 &= 10\,x\\
x^2-10\,x+16 &= 0\\
x_{1,2} &= 5\pm\sqrt{5^2-16}\\
x_{1,2} &= 5\pm 3
\end{aligned}$$

Svar $x_1 = 8$ och $x_2 = 2$.

Del 1 # 9 (0/3/⊗) Max/min teckentabell

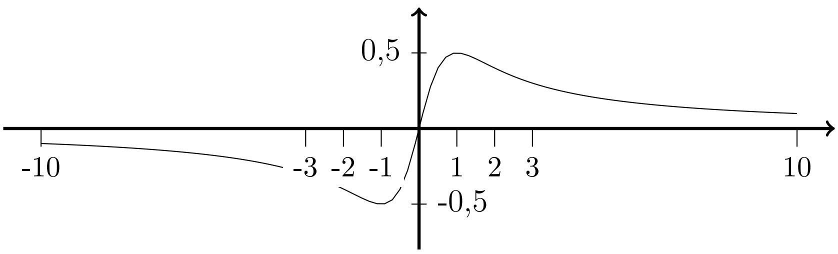
Strategi

- derivera
- bestäm derivatans nollställen (rötter)
- undersök med hjälp av teckentabell (eller funktionens andradervatan) om derivatans nollställen är max/min eller terasspunkter.
- undersök randpunkter (saknas i denna uppgift då intervallet är oändligt)

Vid uppgifter av den här typen är det bra att med hjälp av en graf skapa en uppfattning av hur funktionen ser ut. Miniräknare är inte tillåten. Gör en tabell för några x-värden.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	10	100
$f(x)$	$-0{,}3$	$-0{,}4$	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	$0{,}4$	$0{,}3$	$\approx 0{,}1$	$\approx 0{,}01$

Gör en enkel skiss.



Deluppgift a)

Derivera funktionen

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Använd FORMELSAMLINGEN där finns regler för derivering.

Derivator	Funktion	Derivata
	$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
	$f(x)\cdot g(x)$	$f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)$
	$\dfrac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x)\neq 0)$	$\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Använd formeln för derivering av $\frac{f(x)}{g(x)}$. Vi får

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Lös ekvationen

$$0 = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

som har två nollställen

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -1.$$

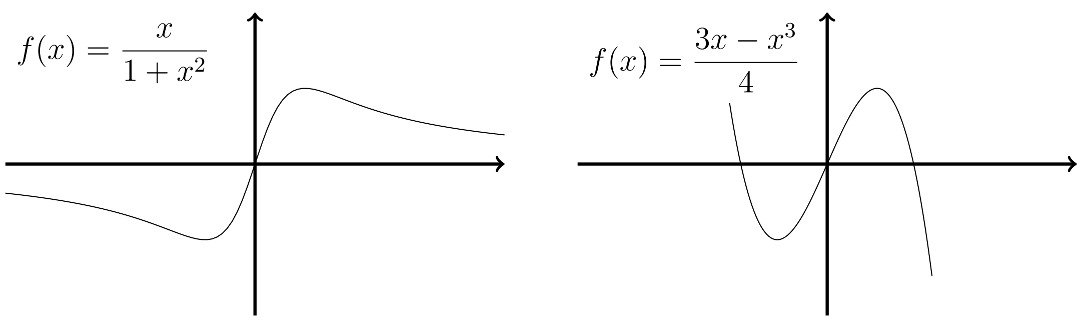
Gör en teckentabell

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$1<x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Svar a) Lokalt maximum $f(1) = 0{,}5$ och lokalt minimum $f(-1) = -0{,}5$

Deluppgift b)

Uppgiften gäller att undersök om funktionen har något största och minsta värde. Uppenbarligen har funktionen ett lokalt minimumvärde $f(-1) = -0{,}5$ och ett lokalt maximumvärde $f(1) = 0{,}5$. Teckentabellen duger inte för att dra slutsatsen att funktionen $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ har ett största och minsta värde. Funktionerna i bilden nedan visar $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ och $f(x) = \dfrac{3x-x^3}{4}$. Båda har exakt samma teckentabell och exakt samma lokala max/min-värde.



För $x \gg 1$ gäller att

$$\frac{x}{1+x^2} \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

(Symbolen $a \gg b$ betyder att a är mycket större än b.) Detta betyder att funktionen asymptotiskt går mot noll när x går mot oändligheten. Därmed är $f(1) = 0{,}5$ ett största värde. Samma resonemang visar att $f(-1) = -0{,}5$ är ett minsta värde.

Svar b) Funktionen har ett största värde $f(1) = 0{,}5$ och ett minsta värde $f(-1) = -0{,}5$.

Deluppgift b) Alternativ lösning

Vid bestämning av absolut största respektive absolut minsta värde i ett begränsat intervall måsta man undersöka funktionens värde i intervallets ändpunkter. Givetvis måsta man också undersöka förekomsten av lokala max/min-punkter i det inre av intervallet med hjälp av förstaderivatans nollställen. I detta fall är ändpunkterna $-\infty$ respektive $+\infty$. Med symbolen ∞ menar vi oändligheten och med $f(+\infty)$ menar vi

$$f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

och motsvarande för $-\infty$. Om vi i vårt fall uppfattar $-\infty$ och $+\infty$ som intervallets ändpunkter måste vi undersöka dessa punkter. För funktionen

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

gäller både att

$$f(-\infty) = 0$$
$$f(+\infty) = 0$$

Funktionen har alltså ett största värde $f(1) = 0{,}5$ och ett minsta värde $f(-1) = -0{,}5$

Del 2 # 10 (2/0) pq-formeln

I FORMELSAMLINGEN finns pq-formeln.

Andragradsekvationer	$x^2+px+q=0$	$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$

Ekvationen är

$$z^2+\underbrace{38}_{p}z+\underbrace{557}_{q}=0$$

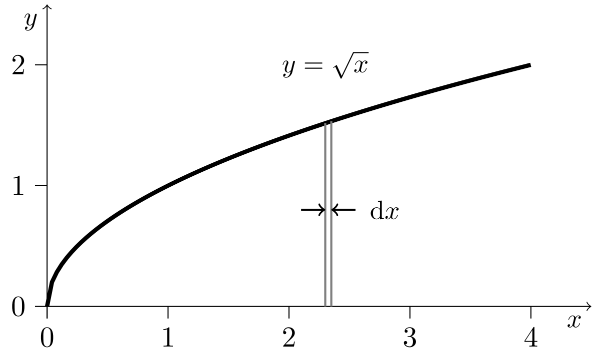
Med $\frac{p}{2}=19$ och $q=557$ får vi

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= -19\pm\sqrt{19^2-557}\\ x_{1,2} &= -19\pm\sqrt{361-557}\\ x_{1,2} &= -19\pm\sqrt{-196}\\ x_{1,2} &= -19\pm i\,14\end{aligned}$$

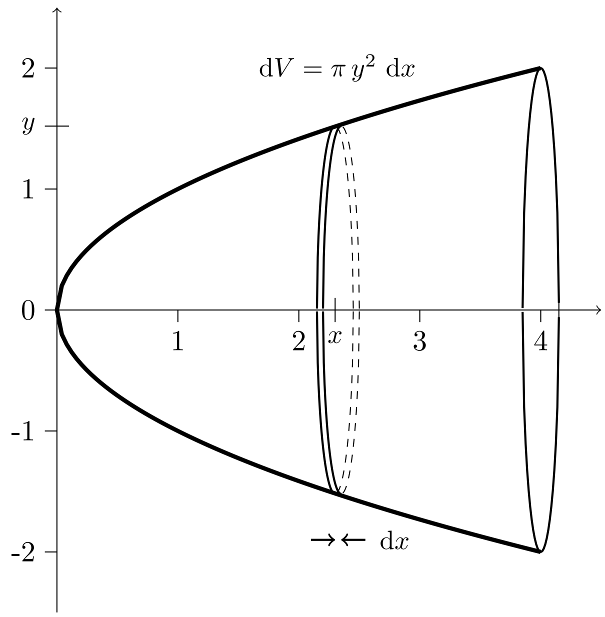
Svar $x_{1,2}=-19\pm i\,14$

Del 2 # 11 (2/0) Rotationsvolym

Låt kurvan $y = \sqrt{x}$ rotera kring x-axeln.



Beräkna volymen av skivor vinkelräta mot x-axeln.



$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= \pi\, y^2\ \mathrm{d}x = \pi\, x\ \mathrm{d}x \\
V &= \int \mathrm{d}V \\
&= \int_0^4 \pi\, x\ \mathrm{d}x = \left.\frac{\pi\, x^2}{2}\right|_0^4 = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} - \frac{\pi \cdot 0}{2} = \pi\, 8
\end{aligned}
$$

Svar a) $\int_0^4 \pi\, x\ \mathrm{d}x$
Svar b) $\pi\, 8$

Del 2 # 14 (0/3) Kedjeregeln

Cirkelns area A är

$$A = \pi r^2$$

där r är cirkelns radie. Efterfrågat är $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ när $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$ och radien ökat under $6\,\mathrm{s}$ från noll till $r = 1{,}5\,\mathrm{m/s} \times 6\,\mathrm{s} = 9\,\mathrm{m}$. I FORMELSAMLINGEN finns kedjeregeln:

Kedjeregeln	Om $y = f(z)$ och $z = g(x)$ är två deriverbara funktioner så gäller för $y = f(g(x))$ att $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ eller $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$

I vårt fall har vi

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2\pi \overbrace{r}^{9\,\mathrm{m}} \overbrace{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r}}^{1{,}5\,\mathrm{m/s}} = 2\pi \cdot 9 \cdot 1{,}5 = 84,8 \approx 85\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}.$$

Svar Arean ökar med $85\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

Del 2 # 16 (1/1/⊗) Komplext tal

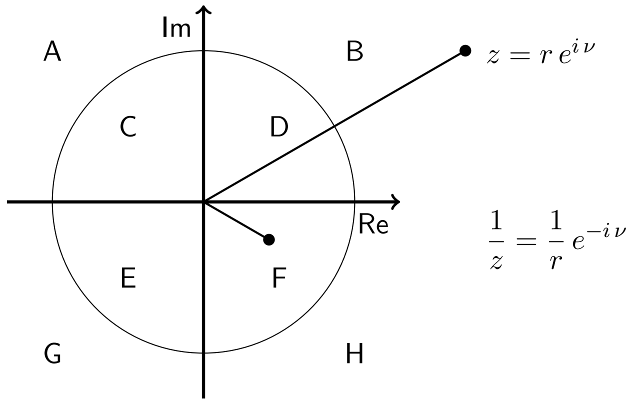
Ett godtyckligt komplext tal i område B kan skrivas som

$$z = r\,e^{i\varphi}$$

där $r > 1$ och $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ alternativt uttryckt i grader som $0° < \varphi < 90°$. Då får vi

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\frac{1}{e^{i\varphi}} = \frac{1}{r}\,e^{-i\varphi}.$$

Givetvis gäller att $\frac{1}{r} < 1$ då $r > 1$ och vinkeln $-\varphi$ ligger i intervallet $\frac{-\pi}{2} < -\varphi < 0$. Talet $\frac{1}{z}$ hamnar i område F. Figuren illustrerar.



Del 2 # 17 (3/3/⊗) Rotationsvolym

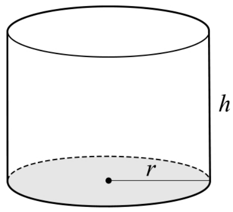
Uppgiften är konstruerad för att lösas med kunskap om integraler och rotationsvolymer men kan lösas enklare med grundläggande kunskap om volymer hos koner och cylindrar som finns i FORMELSAMLINGEN. Följande enkla lösning är sannolikt inte den “avancerade” lösning som problemkonstruktören tänkt.

Cylinder

$V = \pi r^2 h$

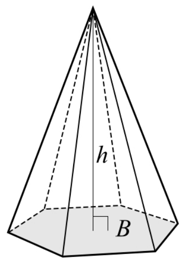
$A = 2\pi r h$

(Mantelarea)



Pyramid

$V = \frac{Bh}{3}$

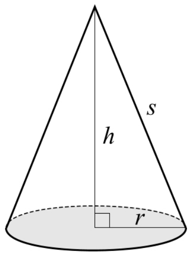


Kon

$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

$A = \pi r s$

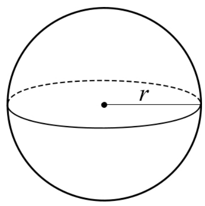
(Mantelarea)

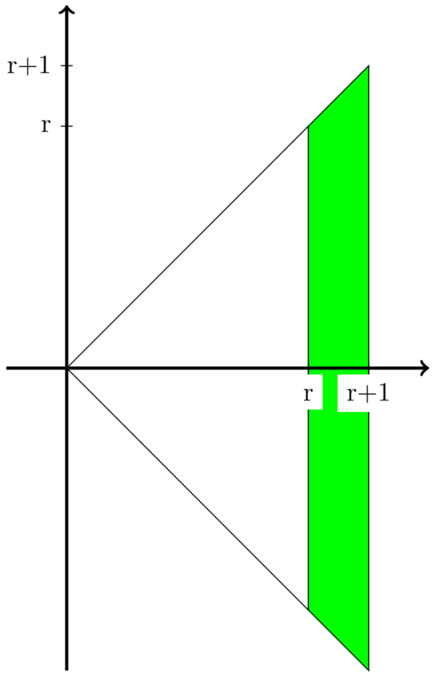


Klot

$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

$A = 4\pi r^2$



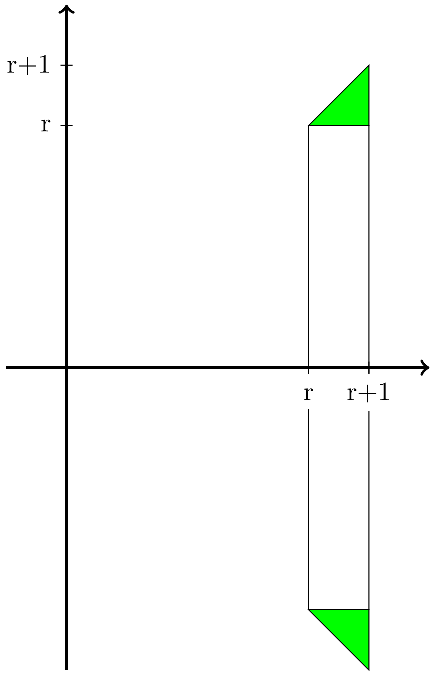


Med $h = r$ blir volymen av en kon med radien r och höjden r

$$V(r) = \frac{\pi r^3}{3}$$

och skivan med inre radien r får en volym som är skillnaden mellan två koner,

$$\begin{aligned} V_{\text{skiva}}(r) &= V(r+1) - V(r) \\ &= \frac{\pi (r+1)^3}{3} - \frac{\pi r^3}{3} \\ &= \frac{\pi (r^3 + 3r^2 + 3r + 1)}{3} - \frac{\pi r^3}{3} \\ &= \frac{\pi (3r^2 + 3r + 1)}{3}. \end{aligned}$$



Volymen av ringen med inre radien r blir skivans volym $V_{\text{skiva}}(r)$ minus volymen av en cylinder med radien r och höjden $h = 1$.

$$V_{\text{ring}}(r) = \underbrace{\frac{\pi\,(3\,r^2 + 3\,r + 1)}{3}}_{\text{skiva}} - \underbrace{\pi\,r^2 \cdot 1}_{\text{cylinder}}$$

$$V_{\text{ring}}(r) = \frac{\pi\,(3\,r + 1)}{3}.$$

Uppgiften gäller:

> Undersök och beskriv hur tätningsringarnas volym förändras för varje centimeter som radien ökar.

Vi får:

$$\begin{aligned}\Delta V_{\text{ring}} &= V_{\text{ring}}(r) - V_{\text{ring}}(r-1) \\ &= \frac{\pi\,[3\,r+1]}{3} - \frac{\pi\,[3\,(r-1)+1]}{3} \\ &= \frac{\pi\,[3\,r+1]}{3} - \frac{\pi\,[3\,r-2]}{3} = \pi\end{aligned}$$

Svar En tätningsring som får 1 cm större radie får $\pi\,\text{cm}^3$ större volym.