Innehåll

Förord

Kom ihåg
- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan
- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Uppgifter relevanta för kursen Ma4

Följande uppgifter är lämpliga för övning till kursen Ma4:

Utan miniräknare	2	3	4	7	8	9
Med	10	11	14	16	17	

Skolverket

Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar
Umeå universitet

PBMaE 05-05

PROV I MATEMATIK KURS E FRÅN NATIONELLA PROVBANKEN

Del I: Uppgift 1-9
Del II: Uppgift 10-17

Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter för del I och II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 90 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E" *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelblad.
Provmaterial	Allt provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv namn och klass på de papper du lämnar in. *Lösningarna till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknaren.*
Provet	Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer. Därefter följer provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 17 är en större uppgift, som kan ta upp till 1 timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänd" och "Väl Godkänd" för del I och II tillsammans. För att få betyget "Mycket väl godkänd" ska kraven för "Väl godkänd" vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser eventuella ¤-uppgifter.

Namn:____________________

Skola:____________________ Klass/program:____________________

Kvinna ☐ Man ☐ Annat modersmål än svenska ☐

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3§ sekretesslagen. För detta material som kommer ur provbanken gäller sekretessen fram till och med den 10 juni 2005.

Sekretessen hävd.

© Skolverket 2005

Uppgift nr 1 (3249)
1/0

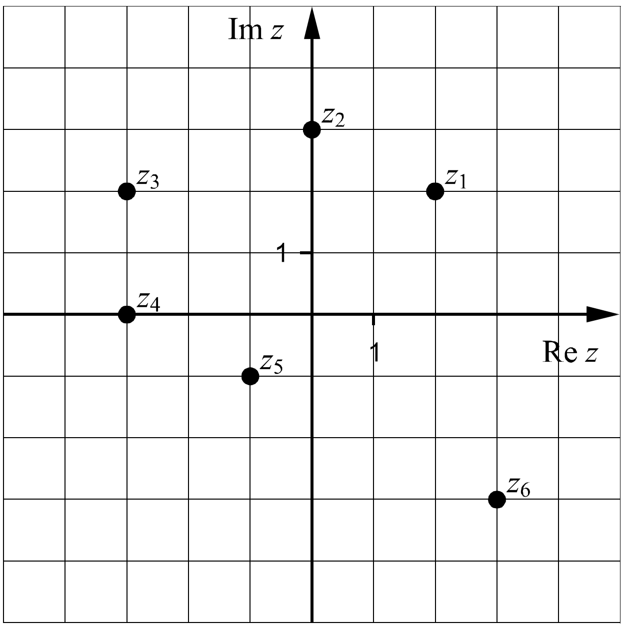
Lös differentialekvationen $y' = 4y$ *Endast svar fordras*

Uppgift nr 2 (3250)
2/0

Förenkla $(5+\mathrm{i})^2$ och skriv resultatet på formen $a+b\mathrm{i}$

Uppgift nr 3 (3251)
1/0 , 1/0 , 1/0

De komplexa talen z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 och z_6 är markerade i det komplexa talplanet nedan.



För vilket eller vilka av talen är

a) $|z| = 3$ *Endast svar fordras*

b) $\mathrm{Re}\, z > 0$ *Endast svar fordras*

c) $\arg z = 45°$ *Endast svar fordras*

© Skolverket 2005

Uppgift nr 4 (2115)
0/2

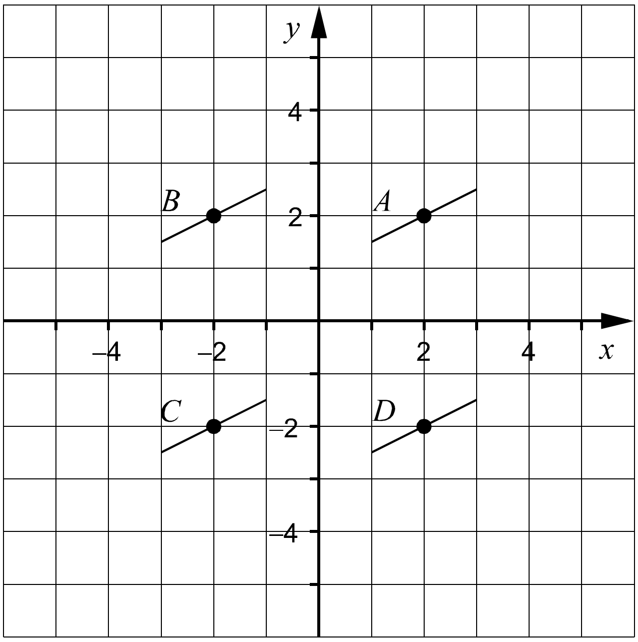
Bestäm det komplexa talet z så att $4z + 3\bar{z} = 28 + 5i$

Uppgift nr 5 (3448)
2/0

Differentialekvationen $y' = x^2 + y^2$ har en lösning y som uppfyller villkoret $y(1) = 0$
Bestäm ett närmevärde till $y(3)$ med hjälp av en numerisk metod, till exempel Eulers stegmetod. Välj steglängden 1.

Uppgift nr 6 (3133)
0/1

Differentialekvationen $y' + \dfrac{y}{2x} = 0$ har lösningskurvor som går genom punkterna *A*, *B*, *C* och *D* i nedanstående figur. I var och en av dessa har tangentens riktning markerats. I två av punkterna är tangentens riktning felaktigt markerad.



I vilka två punkter är tangentens riktning felaktigt markerad?

Endast svar fordras

© Skolverket 2005

Uppgift nr 7 (3093)
0/3

Lös ekvationen $2z^3 = -54$

Uppgift nr 8 (3257)
0/2

Bestäm det reella talet x så att $\mathrm{Re}\left(\frac{10}{x+4\mathrm{i}}\right) = 1$

Uppgift nr 9 (3258)
0/2 , 0/1/¤

Funktionen f är definierad för alla x och $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

a) Bestäm lokala maxima och minima för funktionen f.

b) Undersök om funktionen har något största och minsta värde.

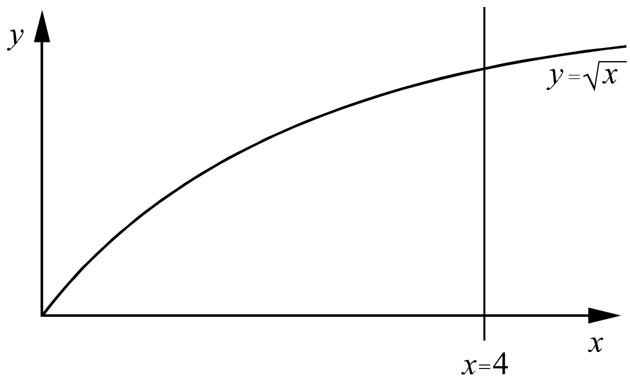
© Skolverket 2005

Uppgift nr 10 (3449)
2/0

Lös ekvationen $z^2 + 38z + 557 = 0$

Uppgift nr 11 (3252)
1/0 , 1/0

Ett område i första kvadranten begränsas av x-axeln, linjen $x = 4$ och kurvan $y = \sqrt{x}$
Låt området rotera kring x-axeln.



a) Ställ upp en integral som ger volymen av den rotationskropp som uppkommer. *Endast svar fordras*

b) Beräkna rotationskroppens volym. *Endast svar fordras*

Uppgift nr 12 (3091)
3/0

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' - 8y = 0$ som uppfyller villkoren $y(0) = 4$ och $y'(0) = 2$

© Skolverket 2005

Uppgift nr 13 (1725)
1/0 , 2/0 , 2/0

Rymdfysiker kan genom att analysera ljuset från en stjärna bestämma hur mycket av ämnet Uran-238 som finns kvar i stjärnan. Då kan man avgöra stjärnans ålder.

Atomkärnor av Uran-238 sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot antalet kvarvarande atomkärnor, N, vid tiden t år.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver sönderfallet.

Endast svar fordras

b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen då hälften av antalet atomkärnor har sönderfallit efter $4{,}5 \cdot 10^9$ år.

Genom att analysera ljuset från stjärnan CS 31082-001 har fysikerna bestämt att det återstår ungefär 14,6 % av den ursprungliga mängden Uran-238 som fanns i stjärnan då den bildades.

c) Bestäm stjärnans ålder.

Uppgift nr 14 (3253)
0/3

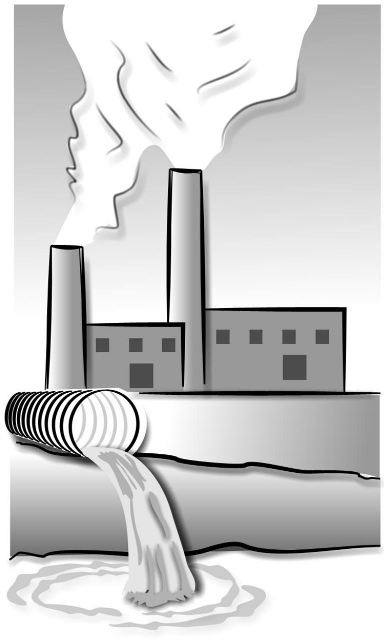
En liten sten kastas i en damm. Då skapas en våg i form av en cirkel på vattenytan. Enligt en förenklad modell kan man anta att cirkelns radie ökar med den konstanta hastigheten 1,5 m/s.

Med vilken hastighet ändras cirkelytans area 6,0 sekunder efter det att stenen träffat vattenytan?

© Skolverket 2005

Uppgift nr 15 (2577)
1/0 , 0/2 , 0/1

En sjö har under en lång tid förorenats av utsläpp från en fabrik. Detta har medfört att det nu finns cirka 500 kg föroreningar i sjön.



Fabriken släpper ut cirka 100 kg föroreningar per år. Via ett vattendrag försvinner årligen 10 % av mängden föroreningar från sjön.

För att studera hur mängden föroreningar (y kg) i sjön förändras med tiden (t år) går det att använda en matematisk modell i form av följande differentialekvation:

$$\frac{dy}{dt} = 100 - 0{,}1y \quad \text{och} \quad y(0) = 500$$

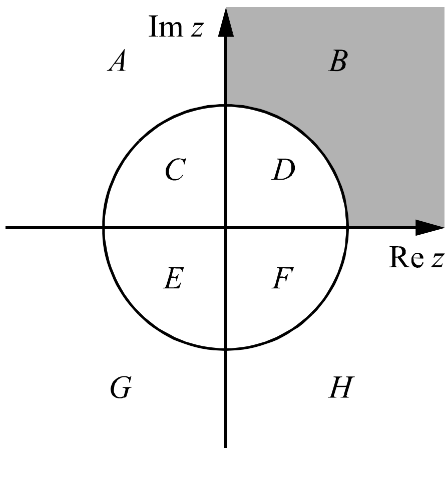
a) Förklara hur $\frac{dy}{dt} = 100 - 0{,}1y$ hänger ihop med förutsättningarna i texten.

b) Lös differentialekvationen då $y(0) = 500$

c) Vad händer enligt modellen med mängden föroreningar i sjön i ett längre tidsperspektiv?

Uppgift nr 16 (3450)
1/1/¤

I figuren är åtta olika områden i det komplexa talplanet markerade med *A, B, C, D, E, F, G* och *H*. Cirkeln är en enhetscirkel med centrum i origo. Cirkeln och koordinataxlarna ingår inte i något av de markerade områdena.



Bestäm i vilket eller vilka områden talet $\frac{1}{z}$ kan ligga om z ligger i B.

© Skolverket 2005

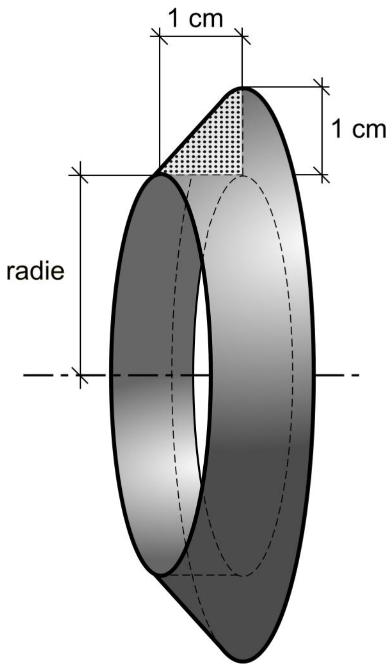
Uppgift nr 17 (3451)
3/3/¤

Vid bedömningen av ditt arbete kommer läraren att ta extra hänsyn till:
• hur långt du kommit i din undersökning
• hur generell din undersökning är
• hur väl du redovisat ditt arbete
• hur väl du utför dina beräknigar
• hur väl du använt det matematiska språket

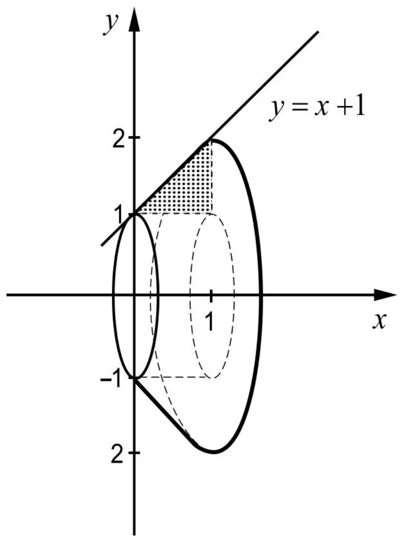
Ett företag tillverkar tätningsringar för rör i olika storlekar. Alla ringar har både höjden och tjockleken 1 cm, men kan ha olika radier (se figur 1).

Företagets produktutvecklare funderar på att utöka sortimentet. De vill därför veta hur mycket materialåtgången ökar för varje centimeter som tätningsringarnas radie ökar.

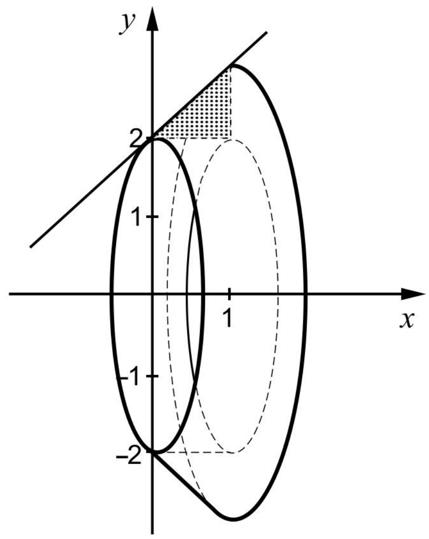
Tätningsringar kan representeras matematiskt genom rotation av trianglar runt x-axeln. I figur 2 och 3 ser du exempel på detta. I dessa figurer har ringarna radierna 1 cm respektive 2 cm.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

- Undersök och beskriv hur tätningsringarnas volym förändras för varje centimeter som radien ökar.

© Skolverket 2005