Innehåll

Förord

Kom ihåg
- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan
- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Uppgifter relevanta för kursen Ma4

Följande uppgifter är lämpliga för övning till kursen Ma4:

Utan miniräknare	1	2	4	6	8	9
Med	12	14	15			

Del 1 # 1 (1/0) Skriv på formen $a + bi$

Uppgift nr 1 (1661)
1/0

Skriv $3(4-3\mathrm{i})+\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})$ på formen $a+bi$ *Endast svar fordras*

$$3(4-3i)+i(2+3i)$$
$$(12-9i)+(2i+\underbrace{3i^2}_{-3})$$
$$12-9i+2i-3$$
$$9-7i$$

Svar $9-7i$

Del 1 # 2 (2/0) Lös ekvationen

Uppgift nr 2 (2092)
2/0

Lös ekvationen $z^2 - 2z + 5 = 0$

Använd pq-formeln, den finns i FORMELSAMLINGEN.

Andragradsekvationer	$x^2 + px + q = 0$	$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 \underbrace{-2}_{p=-2} z + \underbrace{5}_{q=5} \\ x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 - 5} \\ x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 5} \\ x_{1,2} &= 1 \pm 2i \end{aligned}$$

Svar $x_{1,2} = 1 \pm 2i$

Del 1 # 4 (1/0) Komplext tal

Uppgift nr 4 (1662)
1/0

För vissa komplexa tal z $(z \neq 0)$ gäller att $\operatorname{Re} z = 4 \cdot \operatorname{Im} z$
Ge exempel på ett sådant tal. *Endast svar fordras*

Givet enligt uppgiften

$$\operatorname{Re} z = 4 \cdot \operatorname{Im} z.$$

Antag

$$\operatorname{Im} z = 1.$$

Då blir

$$\operatorname{Re} z = 4 \cdot 1 = 4$$

och

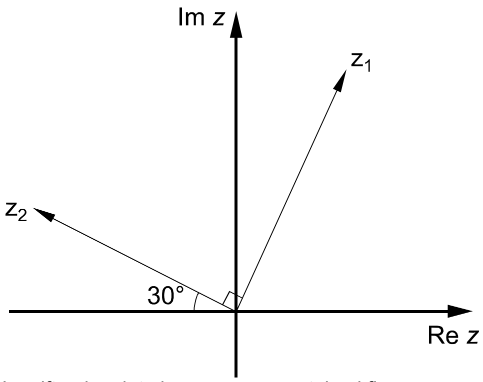
$$z = 4 + i.$$

Svar $z = 4 + i$ är ett möjligt exempel.

Del 1 # 6 (5/0) Komplexa tal, polär form

Uppgift nr 6 (1477)
1/0 , 2/0 , 2/0

För de komplexa talen z_1 och z_2 som är markerade i figuren gäller att $|z_1| = 10$ och $\operatorname{Im} z_2 = 4$



Uppgiften kan inte lösas genom mätning i figuren.

a) Bestäm z_1 på polär form.

b) Bestäm z_2 på polär form.

c) Beräkna $\dfrac{z_1}{z_2}$ och svara på formen $a + bi$

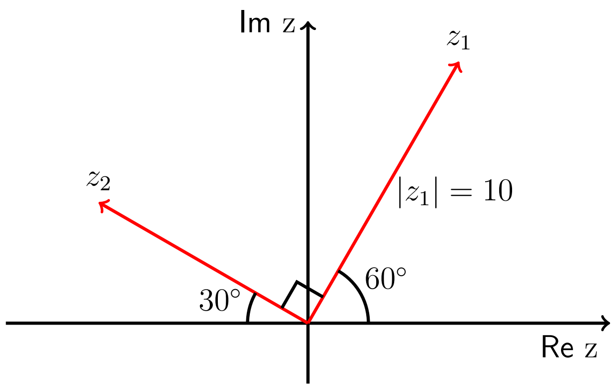
a) Bestäm z_1 på polär form

Med två givna vinklar 30° och 90° blir $\arg z_1 = 60°$. Givet är beloppet $|z_1| = 10$. Då blir på polär form

$$z_1 = 10(\cos 60° + i \sin 60°)$$

.

Svar a) $z_1 = 10(\cos 60° + i \sin 60°)$

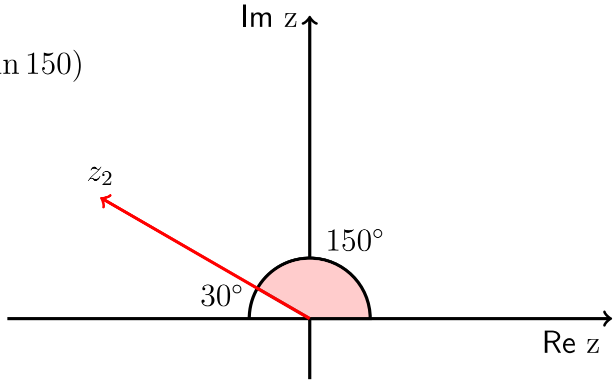


b) Bestäm z_2 på polär form
Givet är att $\arg z_2 = 150°$ och $\mathsf{Im}\, z_2 = 4$.
På polär form blir

$$z_2 = |z_2| \cdot (\cos 150° + i\,\sin 150)$$

Bestäm $|z_2|$ då vi vet att

$$\begin{aligned} \mathsf{Im}\, z_2 &= 4. \\ \underbrace{|z_2|}_{|z_2|=8} \cdot \overbrace{\sin 150°}^{\frac{1}{2}} &= 4. \end{aligned}$$



Svar b) $z_2 = 8(\cos 150° + i\,\sin 150°)$

c) Beräkna $\dfrac{z_1}{z_2}$ och svara på formen $a + bi$

I FORMELSAMLINGEN, sidan 4, finns nästan hela avsnittet om komplexa tal sammanfattat på en halv A4-sida. Endast polynomdivision och faktorsatsen saknas.

Representation	$z = x + \mathrm{i}y = re^{\mathrm{i}v} = r(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$ där $\mathrm{i}^2 = -1$
Argument	$\arg z = v \qquad \tan v = \dfrac{y}{x}$
Absolutbelopp	$\lvert z\rvert = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Konjugat	Om $z = x + \mathrm{i}y$ så $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$
Räknelagar	$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(v_1 + v_2) + \mathrm{i}\sin(v_1 + v_2))$
	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(v_1 - v_2) + \mathrm{i}\sin(v_1 - v_2))$
de Moivres formel	$z^n = (r(\cos v + \mathrm{i}\sin v))^n = r^n(\cos nv + \mathrm{i}\sin nv)$

Med

$$\begin{aligned} z_1 &= 10\,(\cos 60^\circ + i\,\sin 60^\circ) \\ z_2 &= 8\,(\cos 150^\circ + i\,\sin 150^\circ) \end{aligned}$$

blir kvoten

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10}{8}\,[\underbrace{\cos(60^\circ - 150^\circ)}_{\cos(-90^\circ)=0} + i\,\underbrace{\sin(60^\circ - 150^\circ)}_{\sin(-90^\circ)=-1}] = \frac{-5i}{4}$$

Svar c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-5i}{4}$

Del 1 # 8 (0/3) Integral

Uppgift nr 8 (2094)
0/3

Om man vill beräkna längden L av en kurva $y = f(x)$ mellan två punkter vars x-koordinater är a och b kan man använda formeln

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Beräkna längden av kurvan $y = \left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ i intervallet $1 \le x \le 4$

Derivera

$$y = \left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$$

ger

$$y' = \frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ger linjeintegralen

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\ \mathrm{d}x$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}\left(x - \frac{4}{9}\right)}\ \mathrm{d}x$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}x}\ \mathrm{d}x$$

$$L = \int_1^4 \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x$$

$$L = \left[\frac{3}{2}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$L = \left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = 8 - 1 = 7$$

Svar $L = 7$.

Del 1 # 9 (0/3) Fjärdegradsekvation

Uppgift nr 9 (968)
0/3

Ekvationen $z^4 - z^3 - z - 1 = 0$ har fyra rötter. En rot är $z_1 = \mathrm{i}$ och en annan rot är $z_2 = -\mathrm{i}$. Vilka är de övriga rötterna?

Två rötter, $z_1 = i$ och $z_2 = -i$, är kända. Faktorisera polynomet $z^4 - z^3 - z - 1$.

$$
\begin{aligned}
z^4 - z^3 - z - 1 &= (z^2 + pz + q)\underbrace{(z-i)(z+i)}_{z^2+1} \\
z^4 - z^3 - z - 1 &= (z^2 + pz + q)(z^2 + 1) \\
z^4 - z^3 - z - 1 &= z^4 + pz^3 + qz^2 + z^2 + pz + q
\end{aligned}
$$

De två polynomen är lika vilket ger följande ekvationssystem

$$
\begin{array}{lrcllr}
z^4: & 1 & = & 1 & \text{ger} & 1 = 1 \\
z^3: & -1 & = & p & \text{ger} & p = -1 \\
z^2: & 0 & = & q+1 & \text{ger} & q = -1 \\
z^1: & -1 & = & p & \text{ger} & p = -1 \\
z^0: & -1 & = & q & \text{ger} & q = -1
\end{array}
$$

Det faktoriserade polynomet är

$$(z^2 - z - 1)(z^2 + 1)$$

Bestäm rötterna till 1:a faktorn med pq-formeln som finns i FORMELSAMLINGEN.

Andragradsekvationer $x^2 + px + q = 0$ $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$
\begin{aligned}
0 &= z^2 \underbrace{-z}_{p=-1} \underbrace{-1}_{q=-1} \\
z_{3,4} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-1)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

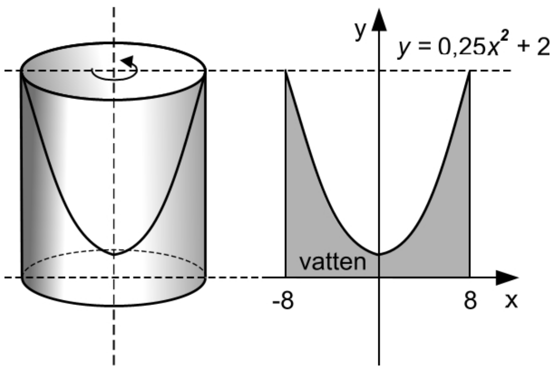
Svar $z_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Del 2 # 12 (2/0) Rotationsvolym

Uppgift nr 12 (1786)
0/3

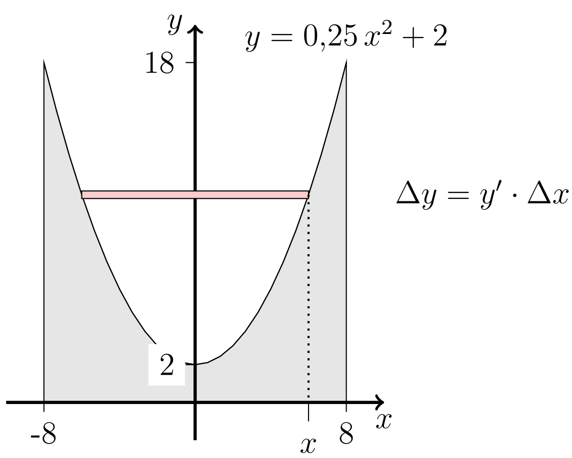
En cylindrisk glasbehållare med inre diametern 16 cm är från början helt fylld med vatten. Behållaren roteras och så länge rotationshastigheten ökar rinner vatten över behållarens kant.
Vid en viss rotationshastighet står vattenytan i behållaren enligt figur 1. Sedd från sidan beskriver då vattenytan en parabel som ges av sambandet $y = 0{,}25x^2 + 2$ (Se figur 2)

Figur 1 Figur 2



Hur mycket vatten har vid denna tidpunkt runnit ur behållaren?

$$
\begin{aligned}
\Delta V &= \overbrace{\underbrace{\pi x^2}_{\text{area}} \cdot \underbrace{\Delta y}_{\text{tjocklek}}}^{\text{tunn skiva}} \\
\Delta y &= y' \cdot \Delta x = 0{,}5\,x \cdot \Delta x \\
\Delta V &= 0{,}5\,\pi\,x^3 \cdot \Delta x \\
V &= \int_{x=0}^{x=8} 0{,}5\,\pi\,x^3 \;\mathrm{d}x \\
V &= \left[0{,}5\,\pi\,\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=8} \\
V &= 0{,}5\,\pi\,\frac{8^4}{4} \;=\; 512\pi \\
V &= 512\pi \approx 1608{,}495438\,\mathrm{cm}^3 \\
V &\approx 1{,}6 \text{ liter}
\end{aligned}
$$

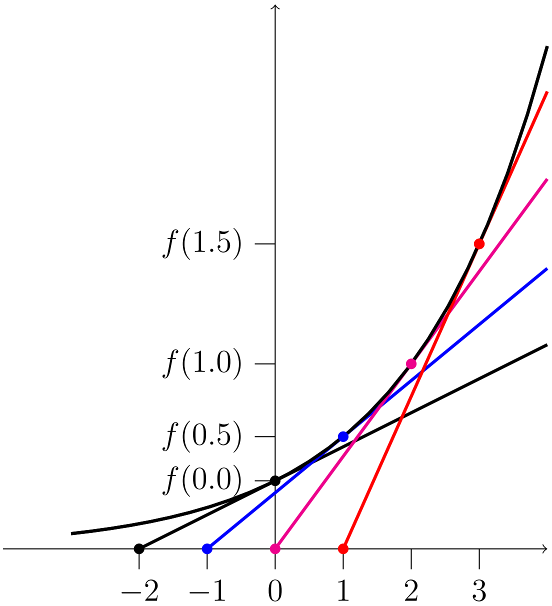


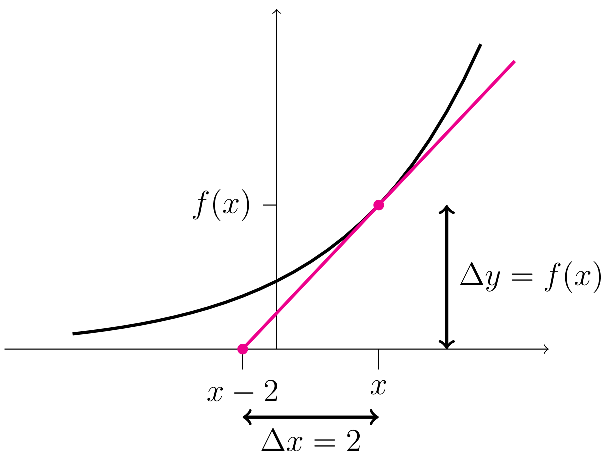
Svar Volym vatten som runnit ur behållaren är 1,6 liter.

Del 2 # 14 (0/3) Kurva med tangent

Uppgift nr 14 (1738)
0/3

För alla punkter på kurvan $y = f(x)$ gäller att tangenten i $(x, f(x))$ också går genom punkten $(x-2, 0)$. Bestäm alla funktioner f som uppfyller detta.





Enligt höger figur gäller att

$$f'(x) = \frac{f(x)}{2}$$

Detta är en differentialekvation av 1:a ordningen.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{f}{2} \\
\frac{\mathrm{d}f}{f} &= \frac{\mathrm{d}x}{2} \\
\ln f &= \frac{x}{2} + C \\
f &= C\,e^{\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

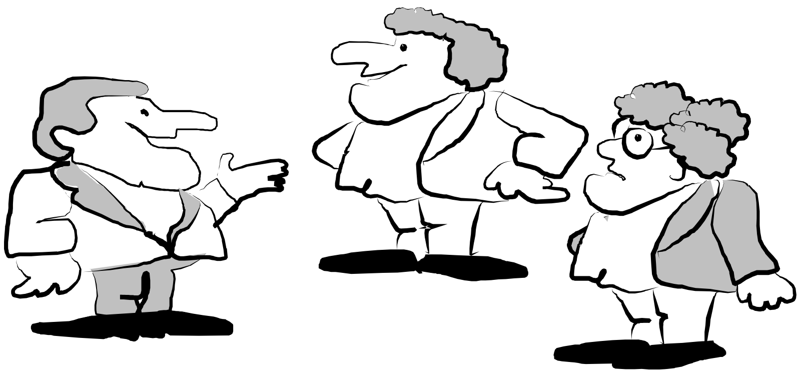
Svar $f(x) = C\,e^{\frac{x}{2}}$

Del 2 # 15 (3/5) Komplexa tal

Uppgift nr 15 (1943)
3/5

Vid bedömningen av ditt arbete med följande uppgift kommer läraren att ta hänsyn till

- hur du argumenterar för att Martins påstående är falskt och Viktors påstående är sant
- hur generellt du motiverar hur z_1 och z_2 ska ligga i förhållande till varandra i det komplexa talplanet för att likheten $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ska gälla
- hur väl du redovisar ditt arbete
- hur väl du använder matematiskt språk och uttryckssätt



- Martin påstår att likheten $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ gäller för **alla** komplexa tal z_1 och z_2
  Ge argument varför det måste vara falskt.

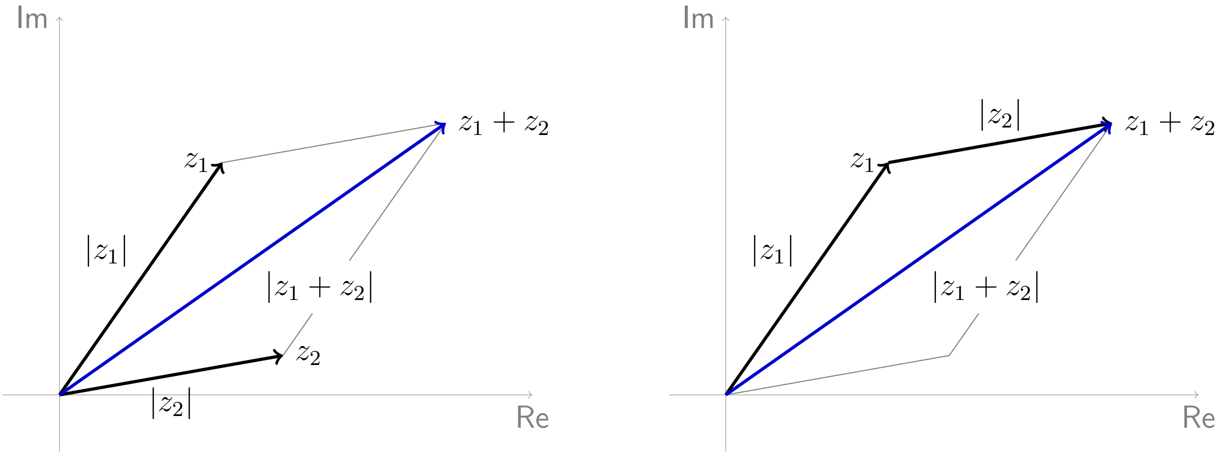
- Viktor påstår att det finns minst **två** komplexa tal z_1 och z_2, båda skilda från noll, för vilka likheten $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ gäller.
  Ge argument varför det måste vara sant.

- Gustav inser dessutom att det går att finna **många** sådana par av komplexa tal z_1 och z_2. Undersök och beskriv hur z_1 och z_2 ska ligga i förhållande till varandra i det komplexa talplanet för att likheten $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ska gälla. Motivera dina slutsatser.

Uppgiften kan lösas både algebraiskt och geometriskt. Båda varianterna presenteras.

Geometrisk lösning

Med ett geometriskt betraktelsesätt blir uppgiften trivial. Ett komplext tal kan representeras med en vektor med start i origo och spets i talet z.



Det är med "ögonmått" uppenbart att $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ i figuren ovan. Uppenbart "ögonmått" är inget matematisk bevis. Olikheten kallas triangelolikheten. Två olika matematiska bevis för påståendet visas i appendix på sidan 17.

Om påståendet $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ för alla komplexa tal

Detta påstående kan inte gälla för *alla* komplexa tal. Exempelvis gäller likheten inte för $z_1 = i$ och $z_2 = -i$ eftersom

$$\underbrace{|i - i|}_{0} \neq \underbrace{|i|}_{1} + \underbrace{|-i|}_{1}.$$

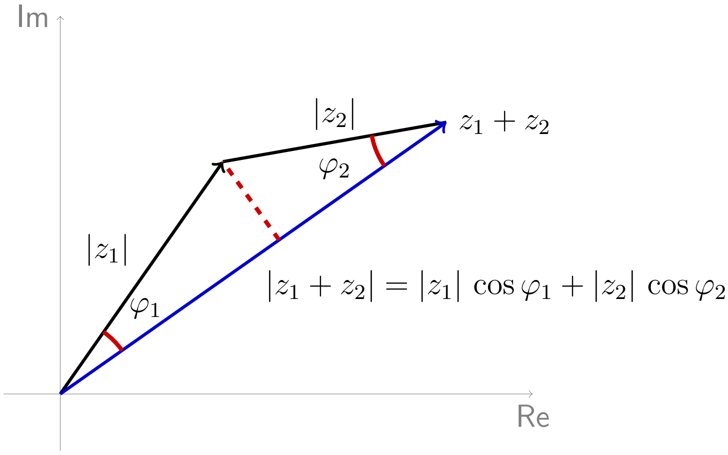
Symbolen $\neq$ betyder *inte lika med*. Det går naturligtvis bra att som motexempel använda andra z_1 och z_2. Exempelvis duger $z_1 = 1$ och $z_2 = -1$ som båda kan uppfattas som komplexa tal med imaginärdelen noll.

Det finns minst två komplexa tal så att $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ gäller

Exempelvis gäller likheten för $z_1 = i$ och $z_2 = 2\,i$ eftersom

$$\underbrace{|i + 2\,i|}_{3} = \underbrace{|i|}_{1} + \underbrace{|2\,i|}_{2}.$$

För vilka komplexa tal gäller att $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$



Av figuren ovan framgår att

$$|z_1 + z_2| = |z_1| \cos\varphi_1 + |z_2| \cos\varphi_2.$$

För vilka komplexa tal gäller att

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

alltså att

$$|z_1| + |z_2| = |z_1| \cos\varphi_1 + |z_2| \cos\varphi_2.$$

Likhet gäller om och endast om $\cos\varphi_1 = 1$ och $\cos\varphi_2 = 1$, alltså att $\varphi_1 = 0$ och $\varphi_2 = 0$. Detta betyder att $\arg z_1 = \varphi_1$ och $\arg z_2 = \varphi_2$. Likheten $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ gäller alltså om och endast om z_1 och z_2 har lika argument.

Algebraisk lösning

I Skolverkets rättningsnorm finns följande algebraiska lösning.

Uppgift nr 15 (1943)

Punkt 1:

Antag att $z_1 = 3 + 2\mathrm{i}$ och $z_2 = 5 - 5\mathrm{i}$

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

$\mathrm{VL} = |z_1 + z_2| = |3 + 2\mathrm{i} + 5 - 5\mathrm{i}| = |8 - 3\mathrm{i}| = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73} \approx 8{,}54$

$\mathrm{HL} = |z_1| + |z_2| = |3 + 2\mathrm{i}| + |5 - 5\mathrm{i}| = \sqrt{9 + 4} + \sqrt{25 + 25} = \sqrt{13} + \sqrt{50} \approx 10{,}7$

$\mathrm{VL} \neq \mathrm{HL}!$

Eftersom likheten inte gäller för dessa komplexa tal kan den inte gälla för alla komplexa tal.
(Även geometriska resonemang är tänkbara här)

Punkt 2:

Antag att $z_1 = 3 + 3\mathrm{i}$ och $z_2 = 5 + 5\mathrm{i}$

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

$\mathrm{VL} = |z_1 + z_2| = |3 + 3\mathrm{i} + 5 + 5\mathrm{i}| = |8 + 8\mathrm{i}| = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

$\mathrm{HL} = |z_1| + |z_2| = |3 + 3\mathrm{i}| + |5 + 5\mathrm{i}| = \sqrt{9 + 9} + \sqrt{25 + 25} = \sqrt{18} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$\mathrm{VL} = \mathrm{HL}!$

Eftersom likheten gäller för dessa två komplexa tal gäller den för minst två komplexa tal.
(Även geometriska resonemang är tänkbara här)

Punkt 3:

Låt $z_1 = A(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ och $z_2 = B(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

$$|A(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) + B(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)| = A + B$$

$$\sqrt{(A\cos\alpha + B\cos\beta)^2 + (A\sin\alpha + B\sin\beta)^2} = A + B$$

$$\sqrt{A^2\cos^2\alpha + 2AB\cos\alpha\cos\beta + B^2\cos^2\beta + A^2\sin^2\alpha + 2AB\sin\alpha\sin\beta + B^2\sin^2\beta} = A + B$$

$$\sqrt{A^2\cos^2\alpha + A^2\sin^2\alpha + B^2\cos^2\beta + B^2\sin^2\beta + 2AB\cos\alpha\cos\beta + 2AB\sin\alpha\sin\beta} = A + B$$

$$\sqrt{A^2\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} + B^2\underbrace{(\cos^2\beta + \sin^2\beta)}_{1} + 2AB\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}_{\cos(\alpha-\beta)}} = A + B$$

Enligt trigonometriska ettan är $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$
och enligt subtraktionsformeln för cosinus gäller att
$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$ och vi får efter kvadrering av VL och HL:

$$A^2 + B^2 + 2AB\cos(\alpha - \beta) = A^2 + 2AB + B^2$$

För att likhet skall gälla måste $\cos(\alpha - \beta) = 1$. Detta är ett nödvändigt och tillräckligt villkor.

$$\cos(\alpha - \beta) = 1$$

$$\alpha - \beta = \pm 0^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\alpha = \beta + n \cdot 360^\circ, \text{där } n \text{ är ett heltal}$$

Eftersom α och β är argument för de två komplexa talen och dessa är lika eller skiljer sig på ett helt antal varv så måste de två talen ligga på samma stråle, som utgår från origo, när de representeras av visare/punkter i det komplexa talplanet.

(Man kan även ansätta rektangulära koordinater eller komma fram till rätt slutsats genom att utföra geometriska resonemang)

Appendix: Bevis av triangelolikheten

Det finns många varianter av bevis för triangelolikheten. Här presenteras två varianter för den intresserade.

Bevis ett

Enligt definition av absolut belopp gäller att

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

och

$$-|y| \leq y \leq |y|.$$

Vi kan lägga ihop dessa olikheter. Då får vi

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Nu har vi att

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

vilket skulle visas.

Bevis två

Vi börjar med att betrakta

$$|x + y|^2 = (x + y)(x + y)$$

som vi utvecklar på följande sätt

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 \\ &= x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 \\ &= |x|^2 + 2 \cdot x \cdot y + |y^2 \\ &\leq |x|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y| + |y|^2 \\ &\leq (|x| + |y|)^2 . \end{aligned}$$

Om vi drar roten ur bägge sidor får vi

$$|x + y| \leq (|x| + |y|)$$

som är den efterfrågade olikheten.