Innehåll

Förord

Kom ihåg
- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan
- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Uppgifter relevanta för kursen Ma4

Följande uppgifter är lämpliga för övning till kursen Ma4:

Utan miniräknare	1	2	4	6	8	9
Med	12	14	15			

Skolverket

Enheten för Pedagogiska Mätningar
Umeå universitet

PBMaE 02-05

PROV I MATEMATIK KURS E FRÅN NATIONELLA PROVBANKEN

Del I: Uppgift 1-9
Del II: Uppgift 10-15

Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter för del I och II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 90 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	Del I: "Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E" *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelblad.
Provmaterial	Allt provmaterial inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv namn och klass på de papper du lämnar in. *Lösningarna till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknaren.*
Provet	Varje uppgift inleds med ett uppgiftsnummer. Därefter följer provbankens identifikationsnummer, som anges inom parentes. På nästa rad anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta 2/1. Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, förklarar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Till de uppgifter där det står *Endast svar fordras* behöver bara svaret anges. Uppgift 15 är en större uppgift, som kan ta upp till 1 timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen "Godkänd" och "Väl Godkänd".

Namn:________________________________

Skola:____________________ Klass/program:______________

Kvinna ☐ Man ☐ Annat modersmål än svenska ☐

Uppgift nr 1 (1661)
1/0

Skriv $3(4-3\mathrm{i})+\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})$ på formen $a+b\mathrm{i}$ *Endast svar fordras*

Uppgift nr 2 (2092)
2/0

Lös ekvationen $z^2-2z+5=0$

Uppgift nr 3 (1482)
1/0 , 2/0

Funktionen $y=C\mathrm{e}^{\frac{-x}{2}}$ är lösning till $y'=ky$

a) Bestäm k. *Endast svar fordras*

b) Bestäm C så att en tangent till $y=C\mathrm{e}^{\frac{-x}{2}}$ får riktningskoefficienten 5 i den punkt på kurvan där $x=0$

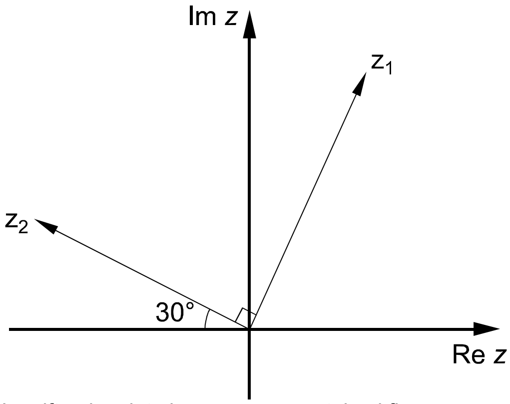
Uppgift nr 4 (1662)
1/0

För vissa komplexa tal z $(z\neq 0)$ gäller att $\mathrm{Re}\,z=4\cdot\mathrm{Im}\,z$
Ge exempel på ett sådant tal. *Endast svar fordras*

Uppgift nr 5 (1483)
3/0

Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'+10y=20$ som uppfyller villkoret $y(0)=40$

Uppgift nr 6 (1477)
1/0 , 2/0 , 2/0



Uppgiften kan inte lösas genom mätning i figuren.

För de komplexa talen z_1 och z_2 som är markerade i figuren gäller att $|z_1| = 10$ och $\mathrm{Im}\, z_2 = 4$

a) Bestäm z_1 på polär form.

b) Bestäm z_2 på polär form.

c) Beräkna $\dfrac{z_1}{z_2}$ och svara på formen $a + b\mathrm{i}$

Uppgift nr 7 (2093)
0/2

Bestäm en homogen differentialekvation av andra ordningen vars allmänna lösning är $y = C\mathrm{e}^{2x} + D\mathrm{e}^{-2x}$

Uppgift nr 8 (2094)
0/3

Om man vill beräkna längden L av en kurva $y = f(x)$ mellan två punkter vars x-koordinater är a och b kan man använda formeln

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Beräkna längden av kurvan $y = \left(x - \dfrac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ i intervallet $1 \le x \le 4$

Uppgift nr 9 (968)
0/3

Ekvationen $z^4 - z^3 - z - 1 = 0$ har fyra rötter. En rot är $z_1 = \mathrm{i}$ och en annan rot är $z_2 = -\mathrm{i}$. Vilka är de övriga rötterna?

Uppgift nr 10 (1478)
2/0

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $3y'' + 6y' - 24y = 0$

Uppgift nr 11 (1356)
1/0 , 3/0

Agneta har förverkligat sin dröm och köpt en motorcykel. På hösten, när säsongen är slut, upptäcker hon att ett av däcken inte håller luften riktigt. Hon ställer in motorcykeln i ett garage för vinterförvaring och mäter lufttrycket till 2,9 bar. Fyra veckor senare har lufttrycket sjunkit till 2,7 bar.

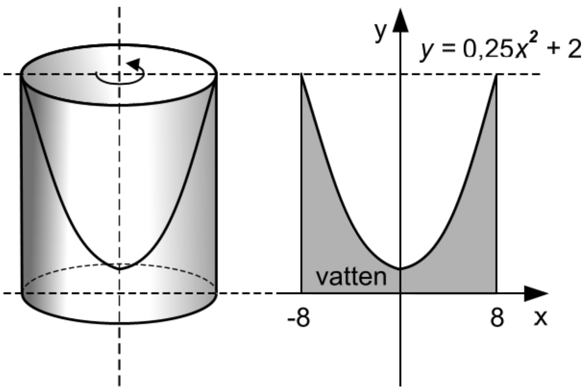
a) Antag att trycket i ett däck minskar med en hastighet som är proportionell mot trycket. Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta.
Endast svar fordras

b) Vilket tryck kommer det att vara i däcket efter totalt 24 veckor i garaget enligt denna matematiska modell?

Uppgift nr 12 (1786)
0/3

En cylindrisk glasbehållare med inre diametern 16 cm är från början helt fylld med vatten. Behållaren roteras och så länge rotationshastigheten ökar rinner vatten över behållarens kant.
Vid en viss rotationshastighet står vattenytan i behållaren enligt figur 1. Sedd från sidan beskriver då vattenytan en parabel som ges av sambandet $y = 0{,}25x^2 + 2$ (Se figur 2)

Figur 1 Figur 2

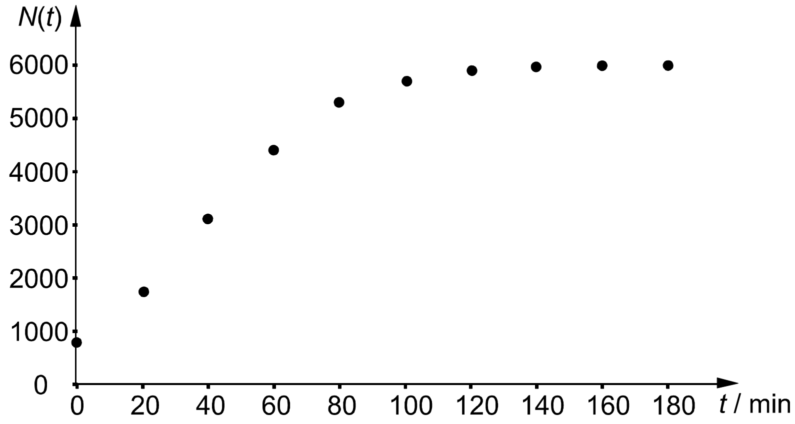


Hur mycket vatten har vid denna tidpunkt runnit ur behållaren?

Uppgift nr 13 (1853)
0/1 , 0/3

Vid en odling av bakterier fanns från början ca 800 bakterier på en agarplatta. Agarplattan innehåller näringslösning som bakterierna kan leva av. Antalet bakterier vid olika tidpunkter framgår av diagrammet nedan. På grund av olika faktorer kan inte bakterieantalet bli hur stort som helst på plattan. Sådana faktorer är t.ex. temperatur samt tillgång till näring och syre.

Bilden ovan visar en s.k. agarplatta med bakterier.



Bakterietillväxten kan beskrivas med differentialekvationen $\frac{dN}{dt} = k \cdot N(6000 - N)$ där N är antalet bakterier vid tidpunkten t minuter och $k = 8{,}08 \cdot 10^{-6}$

Denna differentialekvation har en lösning $N(t) = \frac{6000}{6{,}5e^{-0{,}04848 \cdot t} + 1}$ som väl ansluter till mätvärdena i diagrammet ovan. Differentialekvationen och dess lösning utgör en matematisk modell till försöket.

a) Differentialekvationen betyder att bakterietillväxten är proportionell mot antalet bakterier N och mot uttrycket $(6000 - N)$
Hur ska uttrycket $(6000 - N)$ tolkas?

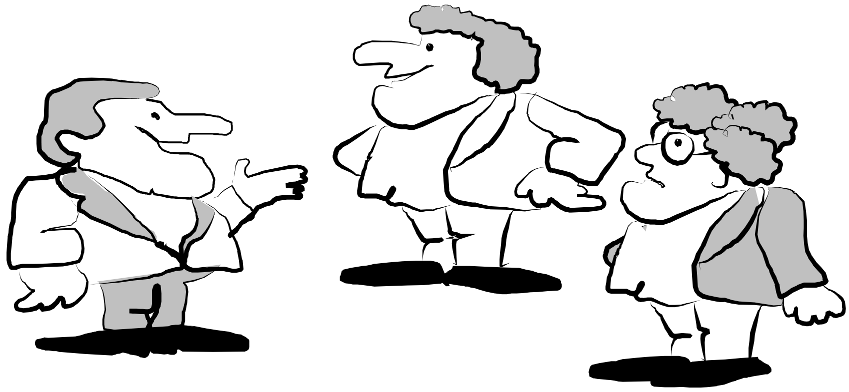
b) Vid vilken tidpunkt var tillväxthastigheten maximal enligt den matematiska modellen?

Uppgift nr 14 (1738)
0/3

För alla punkter på kurvan $y = f(x)$ gäller att tangenten i $(x, f(x))$ också går genom punkten $(x - 2, 0)$. Bestäm alla funktioner f som uppfyller detta.

Uppgift nr 15 (1943)
3/5

Vid bedömningen av ditt arbete med följande uppgift kommer läraren att ta hänsyn till • hur du argumenterar för att Martins påstående är falskt och Viktors påstående är sant • hur generellt du motiverar hur z_1 och z_2 ska ligga i förhållande till varandra i det komplexa talplanet för att likheten $\lvert z_1+z_2\rvert = \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$ ska gälla • hur väl du redovisar ditt arbete • hur väl du använder matematiskt språk och uttryckssätt



- Martin påstår att likheten $\lvert z_1+z_2\rvert = \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$ gäller för **alla** komplexa tal z_1 och z_2
  Ge argument varför det måste vara falskt.

- Viktor påstår att det finns minst **två** komplexa tal z_1 och z_2, båda skilda från noll, för vilka likheten $\lvert z_1+z_2\rvert = \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$ gäller.
  Ge argument varför det måste vara sant.

- Gustav inser dessutom att det går att finna **många** sådana par av komplexa tal z_1 och z_2. Undersök och beskriv hur z_1 och z_2 ska ligga i förhållande till varandra i det komplexa talplanet för att likheten $\lvert z_1+z_2\rvert = \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$ ska gälla. Motivera dina slutsatser.