# Innehåll



# Förord

Kom ihåg
- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan
- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

## Uppgifter relevanta för kursen Ma4

Följande uppgifter är lämpliga för övning till kursen Ma4:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Utan miniräknare | 1 | 4 | 5 | 6 | 9 | 10 |
| Med | 13 | 15 | 16 | | | |

## Del 1 # 1 (2p) Komplexa tal

**1.** Låt $z = 2 + 2i$

a) Ange $\bar{z}$ *Endast svar fordras* (1p)

b) Bestäm $|z|$ *Endast svar fordras* (1p)

c) Skriv z på polär form. *Endast svar fordras* (1p)

;

Givet $z = 2 + 2\,i$

**a)** $\bar{z} = 2 - 2\,i$

**b)** $|z| = 2\sqrt{2}$

**c)** $z = 2\sqrt{2}\; e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\;(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\;(\cos 45 + i\,\sin 45)$

**Svar** se ovan

## Del 1 # 4 (2p) Komplexa tal

**4.** Skriv det komplexa talet $\frac{4i}{1+i} + i$ på formen $a + bi$ (2p)

;

Trixet för att få bort imaginärdelen från nämnaren är att förlänga med konjugatet till faktorn i nämnaren.

$$\frac{4\,i}{1+i} + i \;=\; \frac{4\,i}{(1+i)}\frac{(1-i)}{(1-i)} + i = \frac{4+4\,i}{2} + i = 2 + 3\,i$$

**Svar** $2 + 3\,i$

# Del 1 # 5 (3p) Komplexa tal, polära

**5.** Utgå från talen $z_1 = 1{,}5(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ och $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

a) Bestäm $z = z_1 \cdot z_2$ (2p)

b) Markera $z = z_1 \cdot z_2$ i ett komplext talplan. (1p)

I FORMELSAMLINGEN för Ma4 finns räknereglerna för komplexa tal på polär form.

## Komplexa tal

| | |
|---|---|
| **Representation** | $z = x + iy = re^{iv} = r(\cos v + i\sin v)$ där $i^2 = -1$ |
| **Argument** | $\arg z = v$ $\quad\tan v = \frac{y}{x}$ |
| **Absolutbelopp** | $\lvert z\rvert = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ |
| **Konjugat** | Om $z = x + iy$ så $\bar{z} = x - iy$ |
| **Räknelagar** | $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(v_1 + v_2) + i\sin(v_1 + v_2))$ |
| | $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(v_1 - v_2) + i\sin(v_1 - v_2))$ |
| **de Moivres formel** | $z^n = (r(\cos v + i\sin v))^n = r^n(\cos nv + i\sin nv)$ |

Med

$$z_1 = 1{,}5\,(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3})$$

och

$$z_2 = 2\,(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6})$$

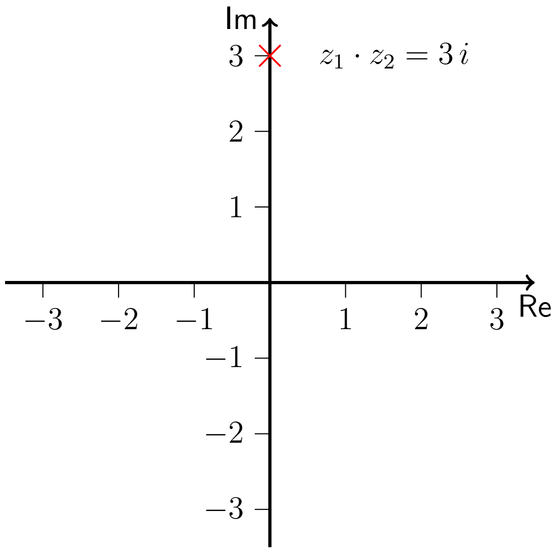
får vi

$$z_1\,z_2 = 1{,}5\cdot 2\left[\underbrace{\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})}_{\cos\frac{\pi}{2}=0} + i\,\underbrace{\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})}_{\sin\frac{\pi}{2}=1}\right] = 3\,i$$

**Svar a)** $z_1\,z_2 = 3\,i$

**Kommentar** Räkningar med polära koordinater gjorde uppgiften lättlöst.

**Deluppgift b)**




**Svar b)** I figuren ovan är $z = z_1\cdot z_2$ markerad.

### Appendix Del I uppgift nr 5 a) med olämplig metod

Räkningar med kartesiska koordinater (vanliga koordinater) ger

$$z_1\,z_2 = 1{,}5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\right) \tag{1}$$

$$z_1\,z_2 = 1{,}5\cdot 2\left[\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}\right) + i\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}\right)\right] \tag{2}$$

För att förenkla (2) finns (minst) två vägar. I FORMELSAMLINGEN för Ma4 finns *trigonometriska formler* respektive *exakta värden* för trigonometriska funktioner. Båda alternativen går att använda och ger rätt utfört rätt svar.

## Del 1 # 6 (3p) Komplexa tal, ekvation $z^3 + \ldots = 0$

**6.** Ekvationen $z^3 - z^2 + 3z - 3 = 0$ är given.

a) Visa att ekvationen har roten $z = 1$ (1p)

b) Bestäm ekvationens övriga rötter. (2p)

;

Polynomet
$$p(z) = z^3 - z^2 + 3\,z - 3$$
har ett nollställe $z = 1$ eftersom $p(1) = 0$.
För att bestämma polynomets övriga två rötter faktoriseras polynomet $p(z)$ enligt
$$z^3 - z^2 + 3\,z - 3 = (z-1)\,(z^2 + B\,z + C)$$
vilket ger
$$z^3 - z^2 + 3\,z - 3 = z^3 + (B-1)\,z^2 + (C-B)\,z - C$$
Denna likhet ska gälla för alla $z$, vilket ger följande ekvationer
$$\begin{array}{rrcrrr} z^3\text{-termer:} & 1 & = & 1 & & \\ z^2\text{-termer:} & -1 & = & -1 & +B & \\ z^1\text{-termer:} & 3 & = & & -B & +C \\ \text{konstanta termer:} & -3 & = & & & -C \end{array}$$
som har lösningen $B = 0$ och $C = 3$. Vi har nu att
$$p(z) = (z-1)\,(z^2+3)$$
som har följande rötter
$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= \phantom{-}i\,\sqrt{3} \\ z_3 &= -i\,\sqrt{3} \end{aligned}$$
**Svar** Rötterna är $z_1 = 1$ och $z_{2,3} = \pm\, i\,\sqrt{3}$

**Kommentar** Det finns fyra ekvationer för att bestämma 2 obekanta. Detta beror på att vi satt koefficienten för $z^2$ till 1 i kvoten och resttermen till noll.

## Del 1 # 9 (2p) Komplexa tal

**9.** Visa att om $z_1 = a + bi$ och $z_2 = a - bi$ ($a$ och $b$ reella) är rötter till ekvationen $z^2 + pz + q = 0$ så är $p$ och $q$ reella. (2p)

;

Om $z_1$ och $z_2$ är rötter till polynomet

$$z^2 + p\,z + q = 0$$

så kan polynomet faktoriseras enligt

$$z^2 + p\,z + q = (z - z_1)\,(z - z_2)$$

Med $z_1 = a + b\,i$ och $z_2 = a - b\,i$ får vi

$$z^2 + p\,z + q = (z - a - b\,i) \cdot (z - a + b\,i).$$

Direkt multiplikation av paranteserna ger 9 termer. Jobbigt. Enklare är att nyttja konjugatregeln.

$$\begin{aligned} z^2 + p\,z + q &= ([z - a] - b\,i) \cdot ([z - a] + b\,i) \\ z^2 + p\,z + q &= [z - a]^2 + b^2 \end{aligned}$$

Här saknas imaginärdelar och därmed måste $p$ och $q$ vara reella.

**Svar** Enligt räkningarna ovan visas att $p$ och $q$ är reella.

**Fortsättning.** Sambandet mellan rötter och koefficienter i andragradspolynomet ges av:

$$z^2 + p\,z + q = z^2 - \underbrace{2\,a}_{z_1 + z_2} \cdot z + \underbrace{a^2 + b^2}_{z_1 \cdot z_2}.$$

## Del 1 # 10 (3p) Komplexa tal

| | | |
|---|---|---|
| **10.** | Visa att $z \cdot \bar{z} \geq 4$ då $z = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{i}$ och $x > 0$ | (3p) |

;

Givet

$$z = 2\sqrt{x} + \frac{i}{\sqrt{x}}$$

Då blir

$$z \cdot \bar{z} = \left(2\sqrt{x} + \frac{i}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(2\sqrt{x} - \frac{i}{\sqrt{x}}\right)$$

och med hälp av konjugatregeln får vi

$$z \cdot \bar{z} = \left(2\sqrt{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$z \cdot \bar{z} = 4x + \frac{1}{x}$$

Undersök extremvärden hos

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x}.$$

Det är också lämpligt att skissa $f(x)$ för hand (miniräknare inte tillåten på denna uppgift). I appendix längre fram visas hur grafen enkelt kan skissas. Derivera

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$$

och bestäm derivatans nollställen.

$$0 = 4 - \frac{1}{x^2}$$

då

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}.$$

Endast roten $x = \frac{1}{2}$ är intressant enligt uppgiftens text. Visa att $f(0{,}5)$ är minimipunkt. Detta kan visas med teckentabell *eller* andraderivata. Här presenteras båda alternativen.

| $x$ | $x < 0{,}5$ | $x = 0{,}5$ | $0{,}5 < x$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | 4 | $\nearrow$ |

**Första alternativet,** teckenväxlingen $-\,0\,+$ visar att $f(0{,}5) = 4$ är minimipunkt.
**Andra alternativet,** andraderivatan är

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

som är positiv då $x > 0$ och därmed är $f(0{,}5) = 4$ en minimipunkt.

**Svar** Enligt resonemanget ovan är det visat att $z \cdot \bar{z} \geq 4$.

## Appendix Del I uppgift nr 10

Skissa grafen till funktionen

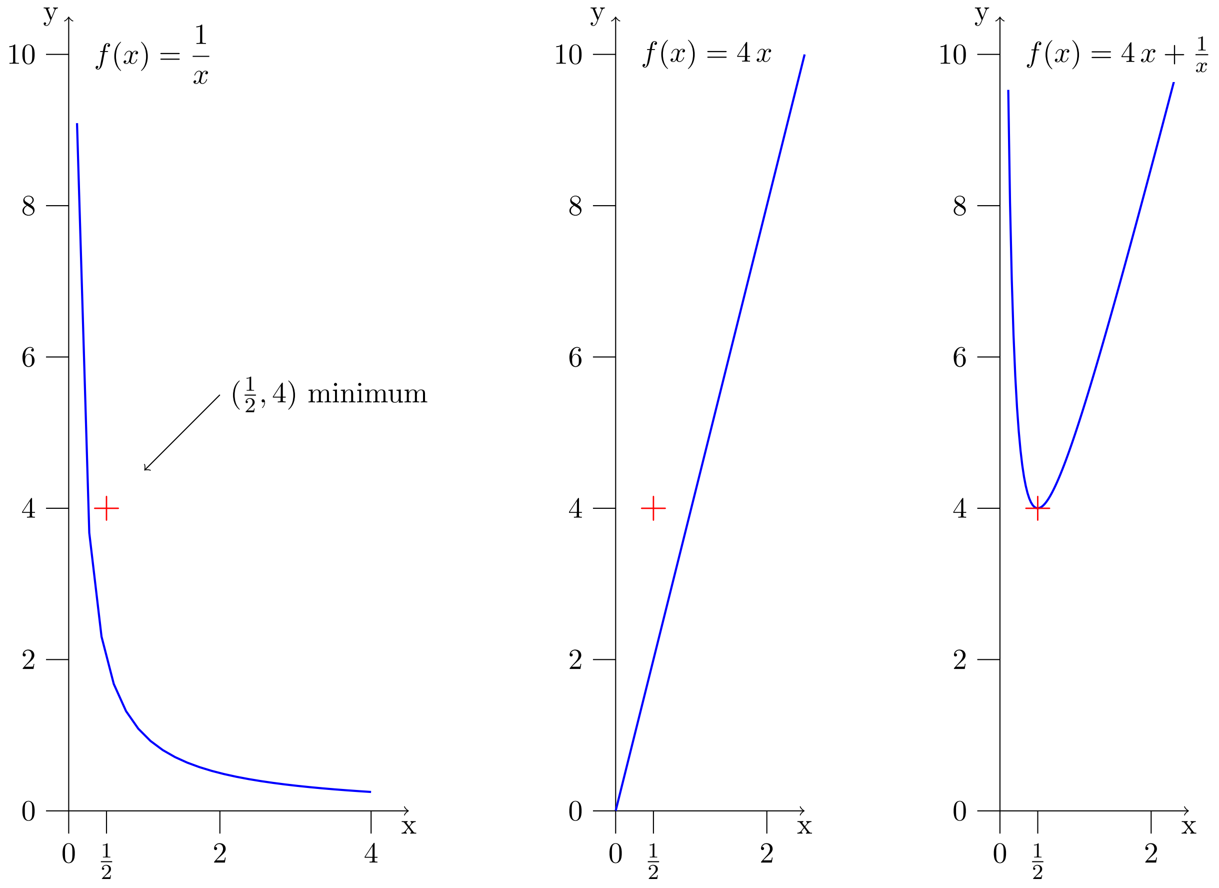
$$f(x) = 4\,x + \frac{1}{x}.$$

Funktionen består av två termer. Då $x \ll 1$ är den första termen liten (symbolen $x \ll y$ betyder att $x$ är mycket mindre än $y$) och den andra termen dominerar. Vi har

$$f(x) = \underbrace{4\,x}_{\approx 0 \text{ då } x \ll 1} + \frac{1}{x} \approx \frac{1}{x}.$$

Då $x \gg 1$ är den andra termen liten (symbolen $x \gg y$ betyder att $x$ är mycket större än $y$) och den första termen är dominerar. Vi har

$$f(x) = 4\,x + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\approx 0 \text{ då } x \gg 1} \approx 4\,x.$$



## Del 2 # 13 (3p) Komplexa tal

**13.** Bestäm $z$ då $|z| = 4$ och $\text{Re}\, z = -\text{Im}\, z$ (3p)

;

Ansätt $z = a + b\,i$. Då blir $\mathsf{Re}\, z = a$ och $\mathsf{Im}\, z = b$.
Enligt uppgiften gäller att $\mathsf{Re}\, z = -\mathsf{Im}\, z$.
Då gäller att $a = -b$, alltså att $z = a - a\,i$.
Enligt uppgiften gäller att $|z| = 4$ alltså att

$$\begin{aligned} |a - a\,i| &= 4 \\ \sqrt{a^2 + a^2} &= 4 \\ a\sqrt{2} &= 4 \\ a &= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Uppgiften gäller att bestämma $z$.

$$z = 2\sqrt{2} - i\,2\sqrt{2}$$

Alternativt kan $z$ skrivas på polär form enligt

$$z = 4\,e^{-i\,\frac{\pi}{4}} = 4\,(\cos\frac{\pi}{4} - i\,\cos\frac{\pi}{4})$$

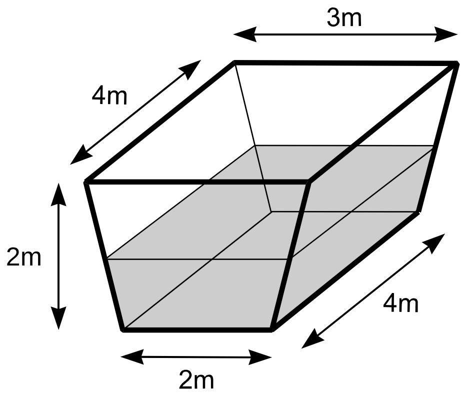
**Svar** $z = 2\sqrt{2} - i\,2\sqrt{2}$ alternativt
$z = 4\,e^{-i\,\frac{\pi}{4}}$ alternativt
$z = 4\,(\cos\frac{\pi}{4} - i\,\cos\frac{\pi}{4})$

## Del 2 # 15 (4p) Modell + kedjeregeln

**15.** Bilden visar en öppen vattentank. Vatten fylls i tanken med en konstant hastighet av 2,4 $m^3$ per minut.

a) Teckna ett matematiskt uttryck för vattenvolymen i tanken som en funktion av vattendjupet. (2p)

b) Med vilken hastighet stiger vattenytan när djupet är 0,50 meter? (2p)




;

### Deluppgift 15 a)

Vattenvolymen i tanken är

$$V(h) = \int_0^h A(x)\, \mathrm{d}x$$

där $h$ vattnets höjd. Vattenytans tvärsnittarea beror på höjden enligt

$$A(x) = 4\left(2 + \frac{x}{2}\right).$$

Kontroll av formeln för $A(x)$. Då $x = 0$ är ytan $4 \cdot 2$ enligt figuren vilket också stämmer med formeln. Då $x = 2$ är ytan $4 \cdot 3$ enligt figuren vilket också stämmer med formeln. Lös integralen

$$\begin{aligned} V(h) &= \int_0^h 4\left(2 + \frac{x}{2}\right)\, \mathrm{d}x \\ &= \left[4\left(2\,x + \frac{x^2}{4}\right)\right]_0^h \\ &= 8\,h + h^2 \end{aligned}$$

**Svar a)** Vattenvolymen i tanken beror på höjden $h$ enligt $V(h) = 8\,h + h^2$

### Deluppgift 15 b)

Använd FORMELSAMLINGEN för Ma4 där finns kedjeregeln.

| | |
|---|---|
| **Kedjeregeln** | Om $y = f(z)$ och $z = g(x)$ är två deriverbara funktioner så gäller för $y = f(g(x))$ att $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ eller $\underline{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx}}$ |

Vi får

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

där

$$\frac{dV}{dh} = 8 + 2h$$

som med insatta värden ger

$$\overbrace{\frac{dV}{dt}}^{2{,}4\, m^3/min} = \overbrace{\frac{dV}{dh}}^{(8+2\cdot 0{,}5)\, m^2} \cdot \underbrace{\frac{dh}{dt}}_{0{,}26667\, m/min}$$

**Svar b)** Vattnet stiger med hastigheten 0,27 m/min.

**Kommentar** Det är alltid bra att kontrollera om svaret är rimligt. Kontrollera med fallet att tvärsnittsarean är bottenarean (snabb nivåökning) respektive topparean (långsam nivåökning).

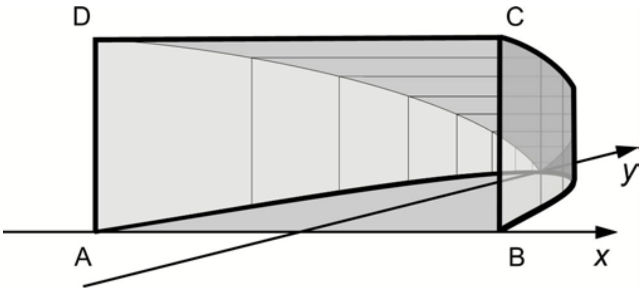
Då $h = 0\,\text{m}$ är $A = 2 \cdot 4 = 8\,\text{m}^2$ vilket ger $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{q}{A} = \dfrac{2{,}4\,\text{m}^3/\text{min}}{8\,\text{m}^2} = 0{,}30\,\text{m/min}.$

$h = 2\,\text{m}$ $3 \cdot 4 = 12\,\text{m}^2$ $\dfrac{2{,}4\,\text{m}^3/\text{min}}{12\,\text{m}^2} = 0{,}20\,\text{m/min}$

Vårt svar är rimligt.

## Del 2 # 16 (7p) Volymintegral & areaintegral

**16.** En arkitekt börjar rita ett förslag till en konsertsal. Hon tänker sig att golvet ska begränsas av en andragradskurva (parabel) och en rät linje vid bakväggen, vinkelrät mot parabelns symmetriaxel. Varje tvärsnitt av salen, parallellt med bakväggen ABCD, ska vara rektangulärt med höjden lika med halva bredden. Bakväggen ska vara 40 m bred och salen 64 m lång. Arkitekten vill undersöka salens luftvolym per person.




a) Ställ upp parabelns ekvation. (1p)

b) Beräkna salens volym. (3p)

c) Beräkna arean av konsertsalens golv. Hur många sittplatser bör man få rum med på konsertsalens golv? Använd detta för att uppskatta luftvolymen per person. Du får själv göra de antaganden som behövs för att lösa uppgiften. (3p)

;

**a) Parabelns ekvation, variant I.** Börja med parabeln

$$y(x) = 1 - x^2$$

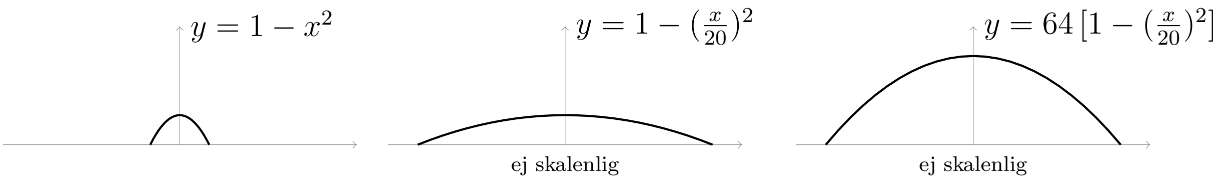
som har maxvärde $y(0) = 1$ och nollställen $y(1) = 0$, $y(-1) = 0$. Modifiera enligt

$$y(x) = 1 - \left(\frac{x}{20}\right)^2$$

som har maxvärde $y(0) = 1$ och nollställen $y(20) = 0$, $y(-20) = 0$. Modifiera enligt

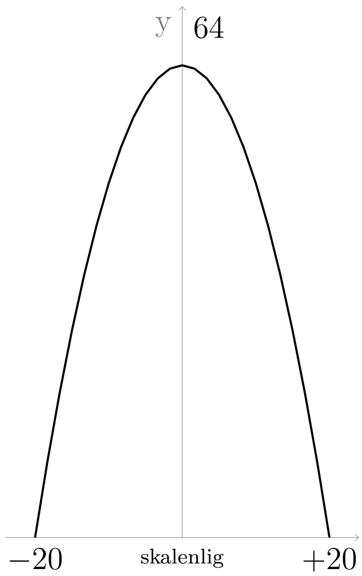
$$y(x) = 64\left[1 - \left(\frac{x}{20}\right)^2\right]$$

som har maxvärde $y(0) = 64$ och nollställen $y(20) = 0$, $y(-20) = 0$.



**a) Parabelns ekvation, variant II.**
Ansätt att parabelns ekvation är

$$y = A\,x^2 + B\,x + C.$$




Bestäm parametrarna $A$, $B$ och $C$. Parabeln går genom punkterna $(-20,0)$, $(+20,0)$ och $(0,64)$. Detta ger ekvationerna

$$\begin{aligned} 0 &= A\,(-20)^2 + B\,(-20) + C \\ 0 &= A\,(+20)^2 + B\,(-20) + C \\ 64 &= A\,(\ \ 0)^2 + B\,(\ \ 0) + C \end{aligned}$$

som har lösningen

$$\begin{aligned} C &= 64 \\ B &= 0 \\ A &= \frac{-64}{400}. \end{aligned}$$

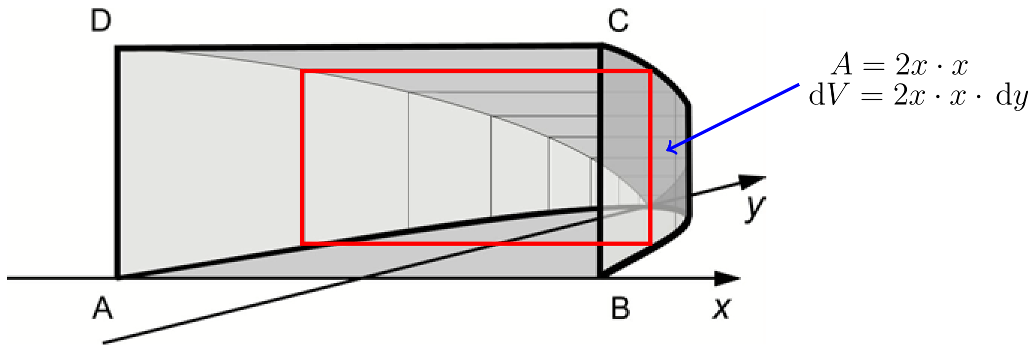
Vilket ger

$$y = 64 + \frac{-64\,x^2}{400} = 64\left[1 - \left(\frac{x}{20}\right)^2\right]$$

**Svar a)** Den efterfrågade parabeln är $y(x) = 64\left[1 - \left(\frac{x}{20}\right)^2\right]$.

**Deluppgift b)**

Bestäm volymen i konsertsalen. Lägg in skivor enligt figuren och integrera.




$$V = \int_0^{64} 2\,x^2\ \mathrm{d}y.$$

Enligt tidigare gäller

$$y = 64\left[1 - \left(\frac{x}{20}\right)^2\right].$$

Förenkla och lös ut $x^2$

$$x^2 = 400\left[1-\frac{y}{64}\right].$$

Integralen blir

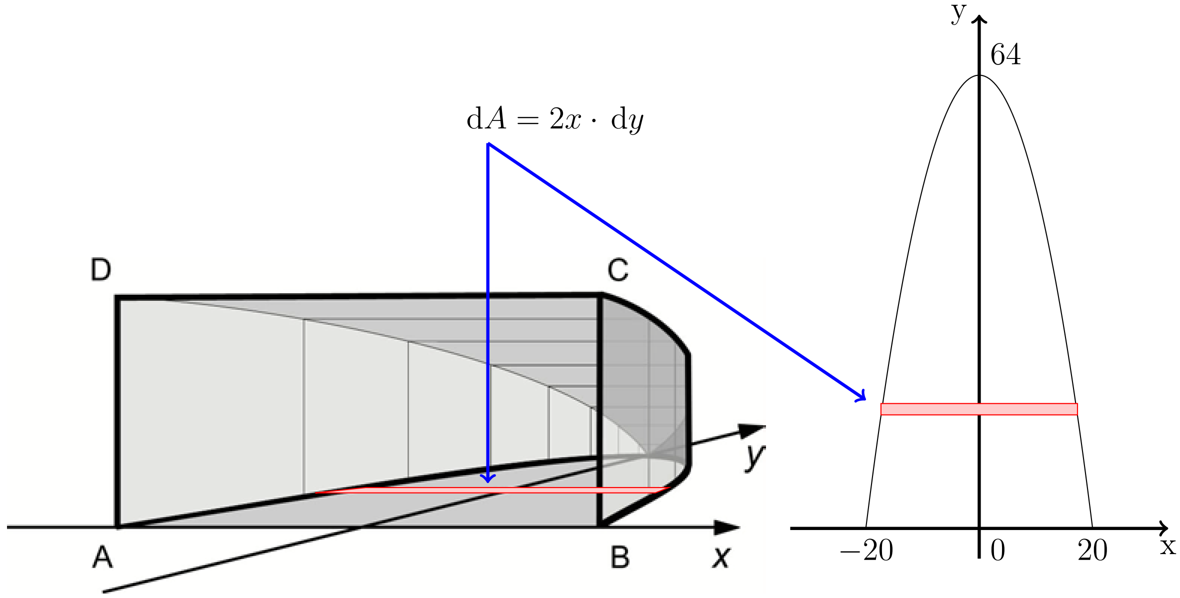
$$V = \int_0^{64} 2\cdot 400\left[1-\frac{y}{64}\right]\,\mathrm{d}y$$

$$V = 2\cdot 400\left[y-\frac{y^2}{2\cdot 64}\right]\Bigg|_0^{64} = 2\cdot 400\cdot 32 = 25\,600$$

**Svar b)** Konsertsalens volym är $25\,600\,\mathrm{m}^3$.

## Deluppgift c)

Bestäm golvets yta i konsertsalen. Lägg in strimlor parallellt med $x$-axeln enligt figuren och integrera. Det går även att lägga in strimlor parallellt med figurens $y$-axel. På sidan 15 visas detta.




Integrera från $y=0$ till $y=64$. Arean $A$ blir

$$A = \int_0^{64} 2\,x\,\mathrm{d}y.$$

Enligt tidigare gäller

$$y = 64\left[1-\left(\frac{x}{20}\right)^2\right].$$

Förenkla och lös ut $x$

$$x^2 = 400\left[1-\frac{y}{64}\right]$$

$$x = 20\left[1-\frac{y}{64}\right]^{1/2}.$$

Integralen blir

$$A = \int_0^{64} 2 \cdot 20 \left(1 - \frac{y}{64}\right)^{1/2} \, dy$$

$$A = 2 \cdot 20 \left(1 - \frac{y}{64}\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} (-64) \Big|_0^{64} = \frac{5120}{3}$$

En sittande person upptar cirka 0,5 m i bredd och 1 m i djupled. En konsertsal behöver också gångar, scen etc. Uppskattningsvis kan en person behöva 1 $m^2$ om övriga nödvändiga utrymmen räknas med. Luft per person blir nu uppskatningsvis $\frac{25600}{(5120/3)} = 15\,\mathrm{m}^3/\mathrm{person}$.

**Svar c)** Antalet sittplatser kan uppskattas till 1700 och luftvolymen till 15 $m^3$/person.

### Deluppgift c) Alternativ areaberäkning

Lägg in strimlor parallellt med $y$-axeln. Integrera från $x = -20$ till $x = 20$. Arean $A$ blir

$$A = \int_{-20}^{20} y \, dx.$$

På grund av parabelns symmetri kan integralen förenklas till

$$A = 2 \int_0^{20} y \, dx.$$

Enligt tidigare gäller

$$y = 64 \left[1 - \left(\frac{x}{20}\right)^2\right].$$

Integralen blir

$$A = 2 \int_0^{20} 64 \left[1 - \left(\frac{x}{20}\right)^2\right] dx$$

som ger

$$A = 2 \cdot 64 \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 20^2}\right]_0^{20}$$

$$A = 2 \cdot 64 \left[20 - \frac{20}{3}\right]$$

$$A = \frac{5120}{3}.$$