Innehåll

Förord 1

Kursprov i matematik, kurs E vt 2000 2

Del I: Uppgifter utan miniräknare 3

Del II: Uppgifter med miniräknare 5

Förord

Kom ihåg
- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan
- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Uppgifter relevanta för kursen Ma4

Följande uppgifter är lämpliga för övning till kursen Ma4:

Utan miniräknare	1	4	5	6	9	10
Med	13	15	16			

Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter.
Hjälpmedel	Del I: Formelsamling Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelsamling
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Lösningar till Del I skall lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare. Skriv ditt namn, komvux/gymnasieprogram och födelsedatum på de papper du lämnar in.
Provet	Provet består av 16 uppgifter. Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs • att du skriver ned vad du gör • att du förklarar dina tankegångar • att du ritar figurer vid behov • att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara svaret anges. Pröva på alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen ”Godkänd” och ”Väl godkänd”. Provet ger maximalt 48 poäng.

Del I

Denna del består av 10 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Låt $z = 2 + 2\mathrm{i}$

a) Ange $\bar{z}$ *Endast svar fordras* (1p)

b) Bestäm $|z|$ *Endast svar fordras* (1p)

c) Skriv z på polär form. *Endast svar fordras* (1p)

2. Ange den lösning till $y' - 4y = 0$ som uppfyller villkoret $y(0) = 5$ (2p)

3. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $2y'' - 8y' + 8y = 0$ (2p)

4. Skriv det komplexa talet $\dfrac{4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} + \mathrm{i}$ på formen $a + b\mathrm{i}$ (2p)

5. Utgå från talen $z_1 = 1{,}5\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ och $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

a) Bestäm $z = z_1 \cdot z_2$ (2p)

b) Markera $z = z_1 \cdot z_2$ i ett komplext talplan. (1p)

6. Ekvationen $z^3 - z^2 + 3z - 3 = 0$ är given.

a) Visa att ekvationen har roten $z = 1$ (1p)

b) Bestäm ekvationens övriga rötter. (2p)

7. Differentialekvationen $y' = y + x - 2$ har en lösning som uppfyller villkoret $y(1) = 2.$ Använd Eulers stegmetod med steglängden $h = 0{,}5$ och beräkna för denna lösning

a) $y(2)$ (2p)

b) $y(0{,}5)$ (1p)

8. Ställ upp en differentialekvation på formen $y' = f(y)$ vars allmänna lösning är $y = A\mathrm{e}^{3x} + 4$ (2p)

9. Visa att om $z_1 = a + b\mathrm{i}$ och $z_2 = a - b\mathrm{i}$ (*a* och *b* reella) är rötter till ekvationen $z^2 + pz + q = 0$ så är *p* och *q* reella. (2p)

10. Visa att $z \cdot \bar{z} \geq 4$ då $z = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{i}$ och $x > 0$ (3p)

Del II

Denna del består av 6 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande).
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

11. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' - 5y = 0$ som uppfyller villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 6$ (3p)

12. Lufttrycket y kPa avtar med höjden x km över havet. På varje höjd förändras lufttrycket med en hastighet som är proportionell mot det aktuella lufttrycket.

a) Uttryck detta med en differentialekvation. (1p)

b) Vid havsytan är lufttrycket 101 kPa. Bestäm proportionalitetskonstanten om lufttrycket har halverats på höjden 5,5 km. (2p)

13. Bestäm z då $|z| = 4$ och $\text{Re}\, z = -\text{Im}\, z$ (3p)

14. Nisse har ett akvarium som innehåller 200 liter vatten, förutom fiskar, växter och stenar. Det bildas nitrat i vattnet och om fiskarna ska hålla sig friska och pigga måste Nisse byta vatten i akvariet.

Tidigare tappade han regelbundet ut 50 liter akvarievatten och ersatte det med lika mycket friskt vatten. Om det före vattenbytet fanns 100 mg nitrat per liter akvarievatten var koncentrationen 75 mg/l efter vattenbytet.

Nu har Nisse utrustat sitt akvarium med en utrustning för vattenbyte. Den pumpar ur akvarievatten och fyller samtidigt på med lika mycket friskt vatten genom en slang. Vattnet som rinner från akvariet kommer att vara väl blandat eftersom motorfiltret är igång hela tiden och flödet i slangen på det tillrinnande vattnet inte är så kraftigt.

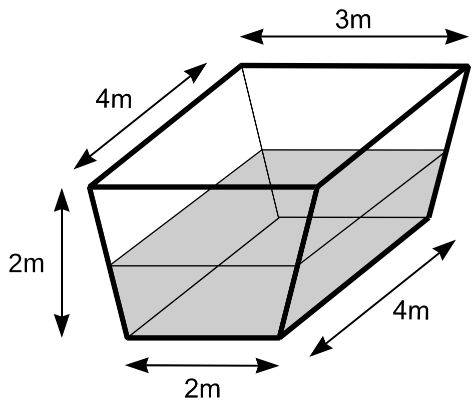
Under vattenbytet kan nitratkoncentrationen i akvariet beskrivas med differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{200}$ där y mg/l är nitratkoncentrationen då x liter friskt vatten tillsatts.

Hjälp Nisse med att lösa ekvationen och beräkna sedan hur mycket vatten som behöver tillsättas enligt den nya metoden för att sänka nitratkoncentrationen från 100 mg/l till 75 mg/l. (3p)

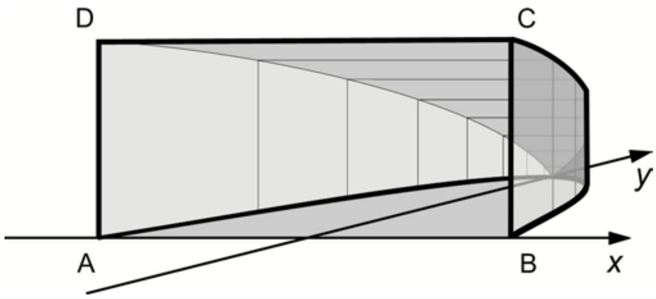
15. Bilden visar en öppen vattentank. Vatten fylls i tanken med en konstant hastighet av 2,4 m^3 per minut.

a) Teckna ett matematiskt uttryck för vattenvolymen i tanken som en funktion av vattendjupet. (2p)

b) Med vilken hastighet stiger vattenytan när djupet är 0,50 meter? (2p)



16. En arkitekt börjar rita ett förslag till en konsertsal. Hon tänker sig att golvet ska begränsas av en andragradskurva (parabel) och en rät linje vid bakväggen, vinkelrät mot parabelns symmetriaxel. Varje tvärsnitt av salen, parallellt med bakväggen ABCD, ska vara rektangulärt med höjden lika med halva bredden. Bakväggen ska vara 40 m bred och salen 64 m lång. Arkitekten vill undersöka salens luftvolym per person.



a) Ställ upp parabelns ekvation. (1p)

b) Beräkna salens volym. (3p)

c) Beräkna arean av konsertsalens golv. Hur många sittplatser bör man få rum med på konsertsalens golv? Använd detta för att uppskatta luftvolymen per person. Du får själv göra de antaganden som behövs för att lösa uppgiften. (3p)