Innehåll

Förord

Kom ihåg
- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan
- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Uppgifter relevanta för kursen Ma4

Följande uppgifter är lämpliga för övning till kursen Ma4:

NATIONELLT PROV I MATEMATIK KURS E VÅREN 1997

Tidsbunden del

Anvisningar

Provperiod	21 april - 2 juni 1997.
Provtid	240 minuter utan rast.
Hjälpmedel	Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelsamling.
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn, komvux/gymnasieprogram och födelsedatum på de papper du lämnar in.
Provet	Provet består av 12 uppgifter. De flesta uppgifterna är av *långsvarstyp* där det inte räcker med bara ett kort svar utan där det krävs • att du skriver ned vad du gör • att du förklarar dina tankegångar • att du ritar figurer vid behov • att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel Till några uppgifter (där det står ”*Endast svar fordras*”) behöver bara svaret anges. Pröva på alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen ”Godkänd” och ”Väl Godkänd”. Provet ger maximalt 69 poäng.

1. Uppgiften handlar om de komplexa talen $z = 2 + 2i$ och $w = 5i$

a) Rita z, w och $z \cdot w$ i det komplexa talplanet (2p)

b) Skriv z och w i polär form (3p)

c) Bestäm $\arg\left(\frac{w}{z}\right)$ *Endast svar fordras* (1p)

d) Bestäm exakt $|z \cdot w|$ *Endast svar fordras* (1p)

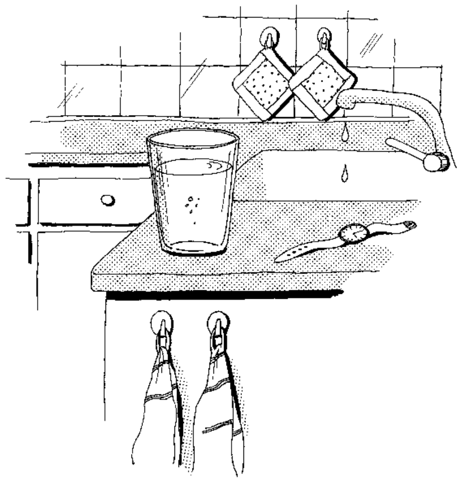
e) Beräkna $1 - w \cdot \bar{z}$ (2p)

2. Lös var och en av differentialekvationerna

$y' = 3x$ $\quad y' = 4y$ $\quad y'' = 5$ (5p)

3. Ett glas kallt vatten ställs i ett rum med temperaturen 20 °C. En modell för hur vattentemperaturen därefter ökar ges av differentialekvationen
$\frac{dy}{dt} = -0{,}1(y - 20)$ där y är vattentemperaturen i °C och t är tiden i minuter.

$y = 20 - 19e^{-0{,}1t}$ är en lösning till denna differentialekvation.



a) Vilken temperatur hade vattnet från början? (1p)

b) Med vilken hastighet stiger temperaturen då vattnets temperatur är 10 °C? (2p)

c) Med vilken hastighet stiger temperaturen då det gått 10 minuter? (2p)

d) Per har en digital termometer som visar vattnets temperatur i hela grader. Enligt Pers mätningar tar det 36 minuter för vattnet att nå rumstemperatur. Stina mäter temperaturen med en digital termometer som visar tiondels grader. Enligt Stina tar det 59 minuter för vattnet att nå rumstemperatur.
Hur hänger det ihop? (3p)

4. a) Beräkna $\left(2\sqrt{3}+2\text{i}\right)^6$ (3p)

b) För vilka heltal n gäller att $\text{Re}\,z = 0$ då $z = \left(2\sqrt{3}+2\text{i}\right)^n$ (3p)

5. Lös ekvationen $x^3 - 4x^2 + 13x = 0$ (3p)

6. a) Lös differentialekvationen $y'' + y = 0$, då $y(0) = 3$ och $y'(0) = 0$ (3p)

b) Motivera att y har ett lokalt maximum för $x = 0$ (1p)

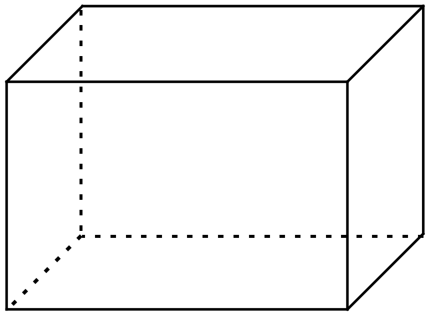
7. För det komplexa talet $z = a + b\text{i}$ gäller att $\bar{z} = z^2$
För vilka talpar a och b är villkoret uppfyllt? (4p)

8. Formen hos en viss kropp kan beskrivas genom att området som begränsas av linjen $y = 2$ och kurvan $y = 6 - x^2$ roteras runt linjen $y = 2$.
Beräkna kroppens volym. (5p)

9. För ett komplext tal z gäller att $\text{Re}\,z = 5$.
Vilka värden kan $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ anta? (4p)

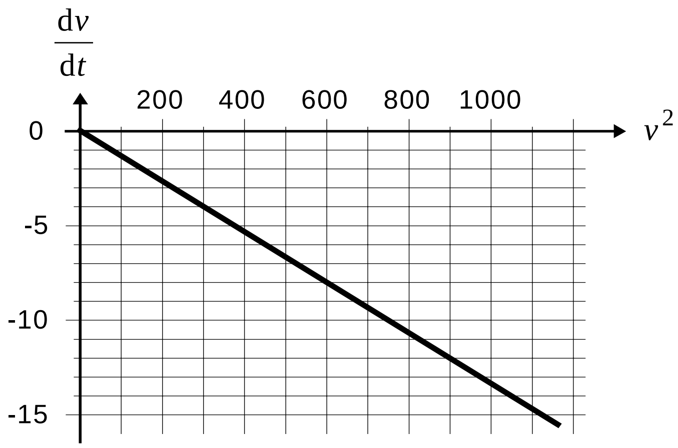
10. I ett rätblock vet vi att två av sidoytorna är 10,0 cm^2 respektive 20,0 cm^2.

Undersök med hjälp av derivata vilka värden som summan av kantlängderna kan anta. (5p)



11. En snabb motorbåt med massan 1200 kg rör sig med hastigheten 30 m/s i lugnt vatten när båtens motor plötsligt stannar. Båten bromsas in av vattnet och t sekunder efter det att båtmotorn stannat är båtens hastighet v m/s.

Båtens hastighetsändring $\frac{dv}{dt}$ i m/s^2 är enligt en modell beroende av hastigheten i kvadrat enligt nedanstående graf.



a) Ställ upp en differentialekvation för båtens rörelse vid inbromsningen med hjälp av diagrammet ovan. (2p)

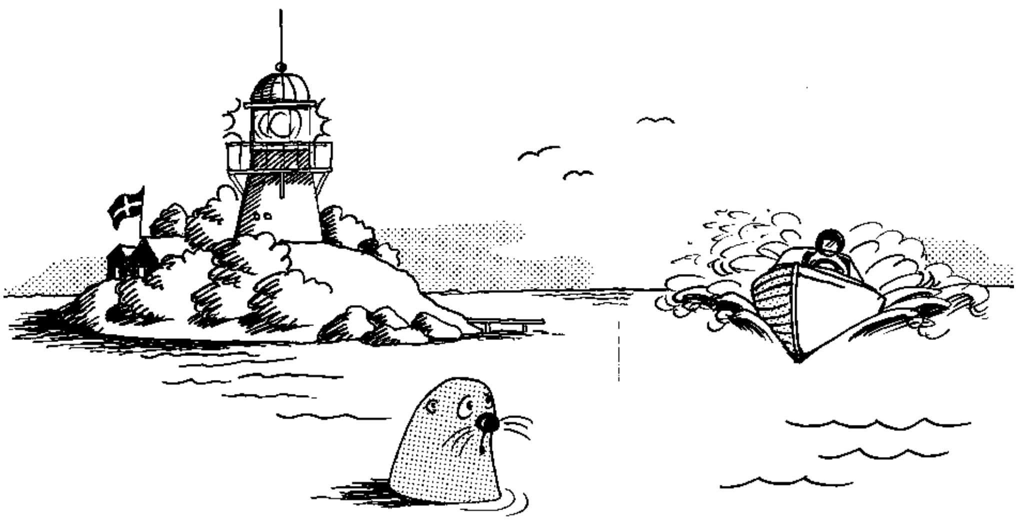
b) En lösning till differentialekvationen ges av uttrycket

$$v = \frac{1200}{16t + C} \quad , \text{ där } C \text{ är en konstant.}$$

Beräkna det värde som detta uttryck ger för båtens hastighet 2 sekunder efter det att motorn stannat. (2p)

c) Bestäm hur långt båten har rört sig efter 2 sekunders inbromsning. (2p)

d) Utgå från differentialekvationen och bestäm med en numerisk metod båtens hastighet 2 sekunder efter det att motorn stannat. Jämför detta värde med det du fick i b) och diskutera varför man inte kan vänta sig att de två värdena skall vara helt överensstämmande. (4p)



12. Tabellen visar funktionsvärden till en växande funktion $y = f(x)$ för vilken man vet att den är deriverbar och $0 \leq f'(x) \leq 0{,}5$ för $x \geq 0$.

x	y
30	5,9
50	8,1
90	11,0

Bestäm ett så litet värde b som du kan för vilket säkert gäller att

$$\int_0^{130} f(x)\mathrm{d}x < b$$ (6p)