Innehåll

Förord

Kom ihåg
- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan
- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Uppgifter relevanta för kursen Ma4

Följande uppgifter är lämpliga för övning till kursen Ma4:

Anvisningar

Provtid	Totalt 240 minuter.
Hjälpmedel	Del I: Formelsamling Del II: Miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande) och formelsamling
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Lösningar till Del I skall lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare. Skriv ditt namn, komvux/gymnasieprogram och födelsedatum på de papper du lämnar in.
Provet	Provet består av 17 uppgifter. Till de flesta uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs • att du skriver ned vad du gör • att du förklarar dina tankegångar • att du ritar figurer vid behov • att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara svaret anges. Pröva på alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen ”Godkänd” och ”Väl godkänd”. Provet ger maximalt 52 poäng.

DEL I

Denna del består av 9 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Låt $z = -1 + \mathrm{i}$

a) Markera z i det komplexa talplanet (1p)

b) Bestäm $\arg z$ *Endast svar fordras* (1p)

c) Bestäm $|z|$ *Endast svar fordras* (1p)

2. Bestäm $z \cdot \bar{z}$ då $z = 2 - 2\mathrm{i}$ (2p)

3. Lös ekvationen $\dfrac{z^2}{z-1} = 2$ (2p)

4. Lös differentialekvationen $y' + 2y = 0$ då $y(0) = 8$ (2p)

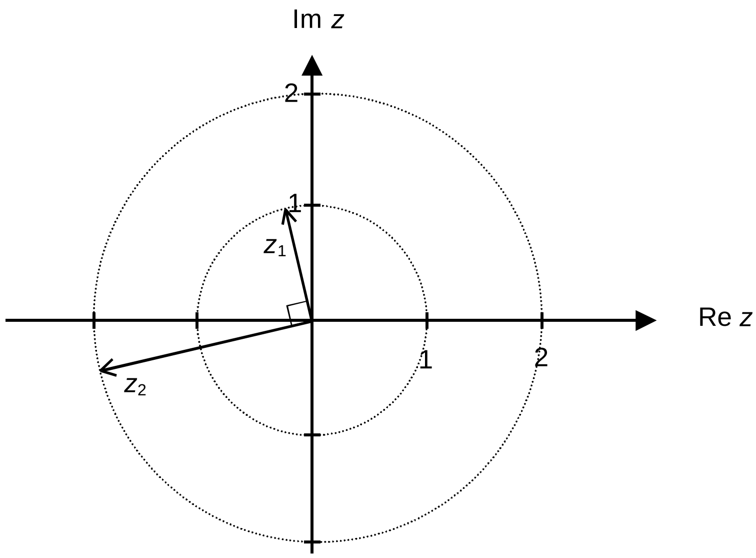
5. Vid beräkning med komplexa tal används ibland de Moivres formel som kan skrivas $z^n = r^n(\cos nv + \mathrm{i}\sin nv)$

Beskriv med egna ord vad de Moivres formel betyder. I din beskrivning ska du använda begreppen *argument*, *absolutbelopp* och *polär form*. (2p)

6. Bestäm en andra ordningens differentialekvation som har en lösning $y = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}$ (2p)

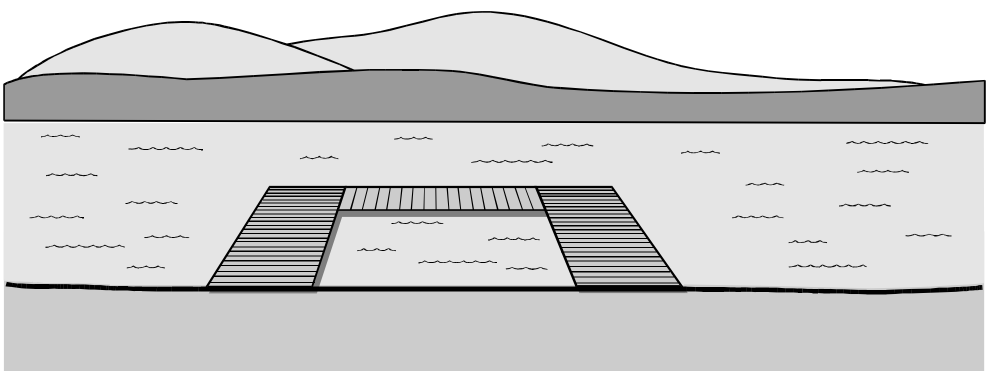
7. Bestäm $y(1)$ *numeriskt* då $y' = y - x$ och $y(0) = 2$. Använd steglängden 0,5 (2p)

8. I figuren finns information om de komplexa talen z_1 och z_2
Bestäm z om $z \cdot z_1 = z_2$. Svara på formen $z = a + b\,\mathrm{i}$ (3p)



9. I en vik vill man göra en rektangulär brygganläggning. Den ska bestå av två bryggdelar från land med en tredje bryggdel som sammanbinder ytterändarna (se figur). Bryggdelarna är alla 1,0 meter breda.

Hur stor kan vattenytan innanför bryggdelarna högst bli om bryggorna och vattenytan innanför får uppta $128\ \mathrm{m}^2$ av vikens yta? (4p)



DEL II

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare (grafritande men ej symbolhanterande).
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

10. Bestäm $\dfrac{z_1}{z_2}$ om $z_1 = \sqrt{3} + 2\mathrm{i}$ och $z_2 = 2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. (2p)

Svara på formen $a + b\mathrm{i}$ med exakta värden på *a* och *b*.

11. Lös differentialekvationen $y'' - 13y' = 0$ då $y(0) = 4$ och $y'(0) = 13$ (3p)

12. Markera i det komplexa talplanet $z = t + (t-3)\cdot \mathrm{i}$ för några reella värden på *t*.
Formulera en slutsats om de komplexa talen *z*. (2p)

13. I Sverige minskade antalet pilgrimsfalkar från 1955 och framåt. Minskningstakten i antal par/år anses vara proportionell mot antalet falkpar. När räkningen av dessa började 1955 fanns 88 par men tio år senare fanns endast 13 par kvar.

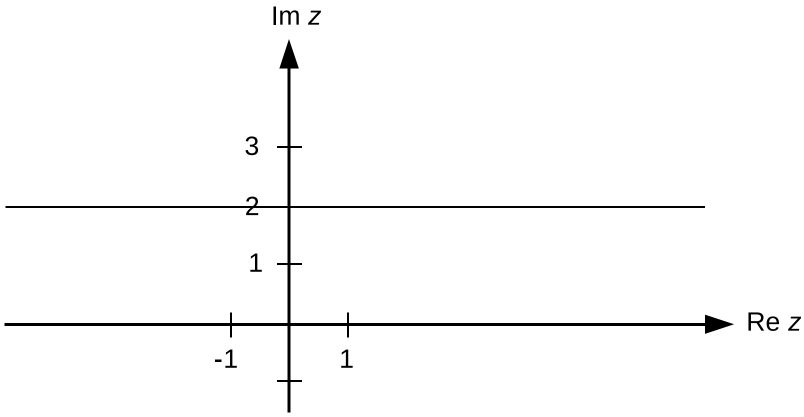
a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver situationen och lös den. (2p)

b) När skulle falken varit utrotad enligt denna modell? (2p)

I Svenska Naturskyddsföreningens (SNF) tidskrift Sveriges natur nr 4 1965 skrev man:
”SNF:s inventering av pilgrimsfalken visar, att läget för denna art är om möjligt än mer katastrofalt: från hela landet har hittills endast 13 par rapporterats. Bara 6 av dessa har fått några ungar! Sedan 1955 har ca 75 par "försvunnit" - någon annan faktor än biociddöden är knappast tänkbar!”

SNFs räddningsarbete för pilgrimsfalken har varit mycket framgångsrik. En aktuell uppgift ur tidskriften Sveriges natur säger att pilgrimsfalken återhämtat sig starkt och att stammen 1998 uppgår till runt 70 par. Över 130 ungar kom på vingar detta år.

14. Talet z ligger på den linje som markerats i det komplexa talplanet nedan. Vilka värden kan realdelen för z^2 anta? (3p)



15. Två av rötterna till ekvationen $z^3 - 2z^2 + az + b = 0$ är $z_1 = \mathrm{i}$ och $z_2 = -\mathrm{i}$
(a och b är reella tal)

a) Bestäm konstanterna a och b. (2p)

b) Bestäm ekvationens tredje rot. (2p)

16. På en väg läggs ett tunt lager asfalt som från början har temperaturen 120 ºC. Asfaltens temperatur y ºC är en funktion av tiden t min. Luftens temperatur är 20 ºC. I en enkel modell antas asfalten svalna med en hastighet som är proportionell mot skillnaden mellan asfaltens temperatur, $y(t)$ ºC, och den omgivande luftens temperatur. Proportionalitetskonstanten är $-0{,}046\,\text{min}^{-1}$.

a) Teckna en differentialekvation med begynnelsevillkor som beskriver avsvalningsprocessen. (2p)

b) Lös differentialekvationen och beräkna hur lång tid det tar för asfalten att svalna till 30 ºC. (3p)

17. I reklamen för en ny bilmodell anges att accelerationen vid omkörning är anmärkningsvärt bra. Bilen uppges kunna accelerera från 60 km/h (16,7 m/s) till 100 km/h (27,8 m/s) på 10 sekunder på fjärde växeln.
Antag att hastigheten *v* m/s vid olika tidpunkter under accelerationen kan beskrivas med uttrycket $v(t) = a\sqrt{t} + b$, där *a* och *b* är konstanter och *t* sekunder är den tid som bilen accelererat.

a) Bestäm konstanterna *a* och *b*. (2p)

b) Hur lång sträcka behövs enligt denna modell för en omkörning som tar 10 sekunder, om du från början kör 60 km/h. (2p)

c) En sådan bil ligger bakom en lastbil som kör 60 km/h och föraren ska köra om på en rak väg med god sikt. Hur lång tid tar omkörningen om den sker enligt bilderna nedan? (3p)