Innehåll

Förord

Kom ihåg
- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan
- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Uppgifter relevanta för kursen Ma4

Följande uppgifter är lämpliga för övning till kursen Ma4:

NATIONELLT PROV I MATEMATIK KURS E HÖSTEN 1996

Tidsbunden del

Anvisningar

Provperiod	6 dec - 18 dec 1996.
Provtid	240 minuter utan rast.
Hjälpmedel	Miniräknare (ej symbolhanterande) och formelsamling.
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn, komvux/gymnasieprogram och födelsedatum på de papper du lämnar in.
Provet	Provet består av 14 uppgifter. De flesta uppgifterna är av *långsvarstyp* där det inte räcker med bara ett kort svar utan där det krävs • att du skriver ned vad du gör • att du förklarar dina tankegångar • att du ritar figurer vid behov • att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel Till några uppgifter (där det står ”*Endast svar erfordras*”) behöver bara svaret anges Pröva på alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning.
Betygsgränser	Ansvarig lärare meddelar de gränser som gäller för betygen ”Godkänd” och ”Väl Godkänd”. Provet ger maximalt 57 poäng.

1. Bestäm de värden som ska stå i rutorna istället för bokstäverna A, B, C och D.
Endast svar fordras. (4 p)

z	arg z	$\lvert z \rvert$	$\bar{z}$
1 + i	**A**		
2i			**B**
C		**D**	$\sqrt{3}+3\text{i}$

2. Skriv på polär form $z = 4 + 4\sqrt{3} \cdot \text{i}$ (3p)

3. Antalet havsörnungar på den svenska ostkusten har ökat kraftigt sedan 1985. Om vi låter antalet havsörnungar vara $y(t)$, där t är tiden i år räknat från 1985, så kan ökningen beskrivas med differentialekvationen

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}17y \quad , \quad y(0) = 19}$$

a) Ungefär hur många havsörnungar skulle det enligt denna modell finns på ostkusten 1995? (3p)

b) Beskriv vad uttrycken i rutan ovan säger om antalet havsörnungar. (2p)

4. Lös differentialekvationerna

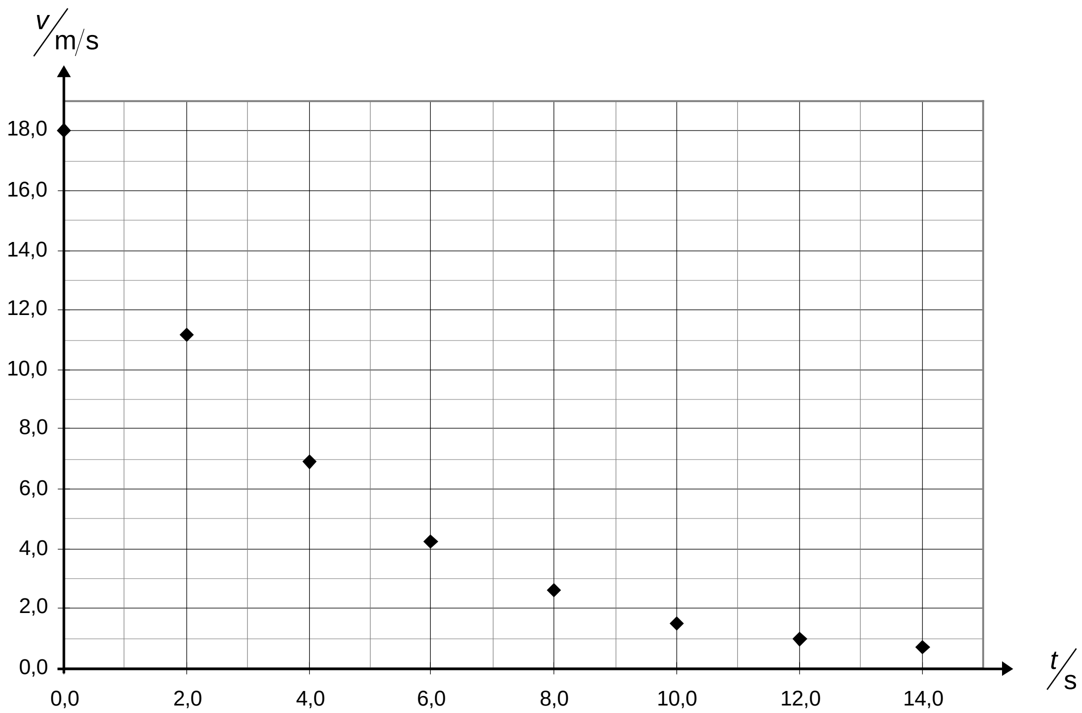
a) $y' - 8y = 0, \quad y(0) = 10$ (2p)

b) $y'' + 4y' + 13y = 0$ (2p)

5. För vilket värde på det reella talet t blir $z = (1+t)(1+\mathrm{i}) - t(1-2\mathrm{i})$ reellt? (3p)

6. Vid ett inbromsningsförsök med en bil mäts farten varannan sekund.
Resultatet framgår av tabellen och diagrammet.

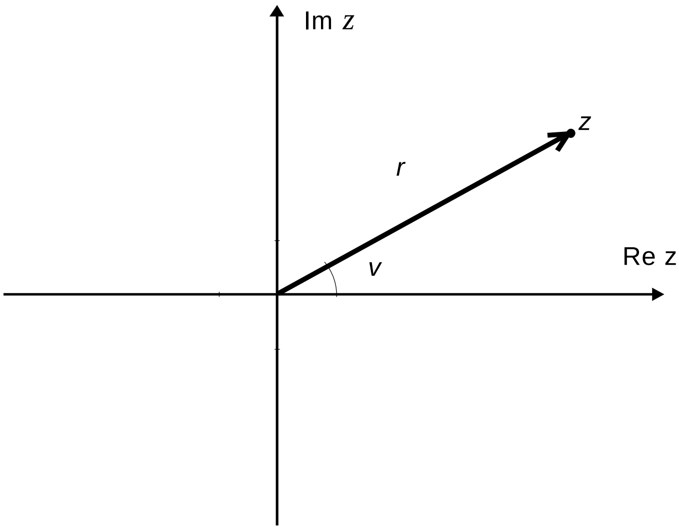
tid i sekunder	0	2	4	6	8	10	12	14
fart i m/s	18,0	11,14	6,89	4,26	2,64	1,47	1,01	0,70



a) Använd diagrammet för att uppskatta hur långt bilen rört sig under de 10 första sekunderna. (2p)

b) $v(t) = 18 \cdot \mathrm{e}^{-0,24t}$ ger en matematisk modell för bilens fart.
Teckna med hjälp av modellen ett uttryck som beskriver hur långt bilen rört sig på de 10 första sekunderna. Beräkna därefter hur långt bilen rört sig under denna tid. (3p)

7. Hur förändras argument och absolutbelopp för ett komplext tal z om det multipliceras med $\frac{1}{2}\mathrm{i}$? (2p)



8. Funktionen $y = f(x)$ är den lösning till differentialekvationen $y'' + 7y' + 10y = 0$ som uppfyller villkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 3$.
Bestäm funktionen y. (4p)

9. En plastlåda utan lock ska ha formen av ett rätblock. Bottenplattan ska vara kvadratisk och tillverkas av tjock plast som kostar 2,00 kr/m^2. De fyra sidorna ska göras av tunnare plast med priset 0,90 kr/m^2. Lådans volym ska vara 0,020 m^3.
Bestäm de mått på lådan som ger minsta möjliga materialkostnad. (4p)

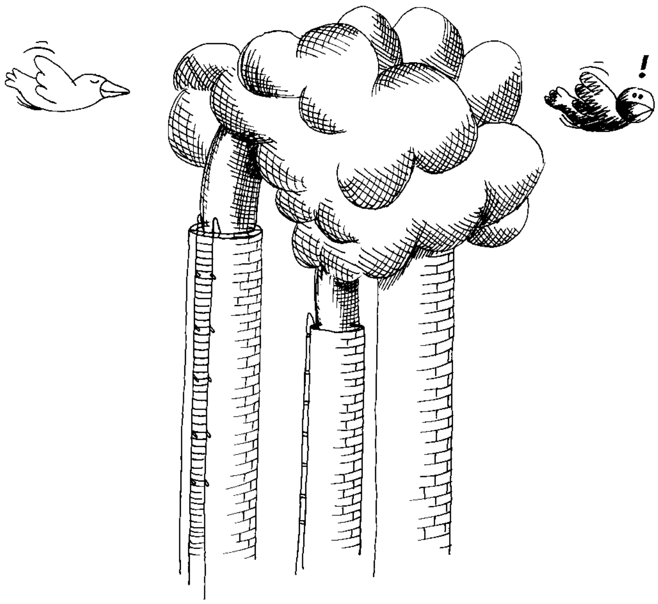
10. Ekvationen $z^2 + az + b = 0$ där a och b är reella tal har en lösning $z = 1 - 2\mathrm{i}$.
Bestäm konstanterna a och b. (3p)

11. Koldioxiden i atmosfären ökar bl. a. på grund av förbränning av fossila bränslen. Före industrialismens genombrott uppgick koldioxidhalten till 280 ppm (miljondelar). År 1960 var halten 310 ppm och har sedan dess ökat med hastigheten 0,40% per år.

a) Ställ upp en differentialekvation som visar hur koldioxidhalten y ppm förändras med tiden x år räknat från 1960. (2p)

b) När det förindustriella värdet 280 ppm har fördubblats anser vissa forskare att medeltemperaturen vid jordytan kommer att höjas 2-5 grader.
Kommer denna fördubbling att inträffa under nästa århundrade? (2p)

c) Slutsatsen i b) grundar sig på användning av en matematiska modell.
Hur kan en kritiker argumentera mot denna användning av modellen? (1p)



12. Ange en valfri funktion $y = g(x)$ som uppfyller villkoren

$\int_1^4 g(x)dx = 5$ och $g'(0) = 2$. (3p)

13. a) Beskriv en numerisk metod för lösning av 1:a ordningens differentialekvationer. Använd egna ord och rita figur. (4p)

b) Använd den metod du beskrivit och bestäm ett närmevärde till $y(2)$, då $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$ och $y(1) = 2$. Använd steglängden 0,5. (2p)

14. En doftkula har volymen 3,0 cm^3. På grund av avdunstning minskar kulans volym med tiden t månader på ett sådant sätt att volymändringen per tidsenhet är proportionell mot kulans area. Efter 1 månad är doftkulans volym 2,0 cm^3.

a) Visa att förutsättningarna ovan leder till att $\frac{dr}{dt} = k$ där k är en konstant och r cm betecknar kulans radie efter t månader. (3p)

b) Beräkna kulans volym efter 4 månader. (3p)