

Innehåll

Förord	2
NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS D VÅREN 2011	3
Förslag på fullständiga lösningar	3
Del I: Digitala verktyg är INTE tillåtna	3
Del I # 1 (2/0) Integrera	3
Del I # 2 (2/1) 3 derivator	4
Del I # 3 (2/0) Beräkna områdets area	6
Del I # 4 (2/0) Primitiv funktion	7
Del I # 5 (2/1) Lös ekvationen	8
Del I # 6 (1/0) Ordna integraler	9
Del I # 7 (0/2) Beräkna integral	10
Del I # 8 (0/1/⊗) Trigonometriskt bevis	11
Del I # 9 (0/3/⊗) Trigonometri	12
Del I # 10 (0/2/⊗) Beräkna integral	15
Del I # 11 (2/4/⊗) Jämför integraler	16
Del D: Digitala verktyg är tillåtna	18
Del II # 12 (2/0) Lombard street	18
Del II # 13 (2/0) Koldioxidutsläpp	19
Del II # 14 (2/1) Avstånd mellan två punkter	21
Del II # 15 (1/2) Luftledning i blåst	23
Del II # 16 (1/1) Bestäm funktion	26
Del II # 17 (1/2/⊗) Triangel	27
Del II # 18 (0/3/⊗) Kabeldragning, minsta kostnad	29

Förord

Kom ihåg

- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan

- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Kursprovet Ma4 är cirka 50% MaD och 50% MaE.

Skolverket har endast publicerat ett kursprov för Ma4.

Äldre kurs	MaD	består av delar ur både	Ma3 och Ma4
Ny	Ma4		MaD och MaE

Därför är det lämpligt att också nyttja de äldre kurserna MaD och MaE vid träning inför kursprov i Ma4.

Del I # 1 (2/0) Integrera

1. Beräkna $\int_0^3 (4 - x^2) dx$

(2/0)

Använd FORMELSAMLINGEN, där finns primitiva funktioner.

Primitiva funktioner

Funktion	Primitiv funktion
k	$kx + C$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C \quad (x > 0)$
e^x	$e^x + C$
e^{kx}	$\frac{e^{kx}}{k} + C$
$a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

$$\int_0^3 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \underbrace{4 \cdot 3}_{12} - \underbrace{\frac{3^3}{3}}_9 - \underbrace{\left(4 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} \right)}_0 = 3$$

Svar Integralen är 3.

Del I # 2 (2/1) 3 derivator**2. Derivera**

- | | | | |
|----|---------------------------|----------------------------|-------|
| a) | $f(x) = \sin 3x$ | <i>Endast svar fordras</i> | (1/0) |
| b) | $g(x) = (1 + 2x)^{11}$ | <i>Endast svar fordras</i> | (1/0) |
| c) | $h(x) = x^2 \cdot e^{3x}$ | <i>Endast svar fordras</i> | (0/1) |

Deluppgifterna är exempel på sammansatta funktioner. Använd kedjeregeln som finns på sidan 3 i FORMELSAMLINGEN.

Kedjeregeln

Om $y = f(z)$ och $z = g(x)$ är två deriverbara funktioner så gäller för $y = f(g(x))$ att

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ eller } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

a) Derivera

$$f(x) = \sin 3x.$$

Den yttre funktionen är $f = \sin(\quad)$ med derivatan $f' = \cos(\quad)$. Den inre funktionen är $g = 3x$ med derivatan $g' = 3$. Vi får:

$$f'(x) = \cos(3x) \cdot 3$$

Svar a) $f'(x) = 3 \cos 3x$.

b) Derivera

$$g(x) = (1 + 2x)^{11}$$

Den yttre funktionen är $f = (\quad)^{11}$ med derivatan $f' = 11(\quad)^{10}$. Den inre funktionen är $g = 1 + 2x$ med derivatan $g' = 2$. Vi får:

$$g'(x) = 11(1 + 2x)^{10} \cdot 2 = 22(1 + 2x)^{10}$$

Svar b) $g'(x) = 22(1 + 2x)^{10}$.

c) Derivera

$$h(x) = x^2 \cdot e^{3x}$$

$$h'(x) = x^2 \cdot \left(\frac{d}{dx} e^{3x} \right) + \left(\frac{d}{dx} x^2 \right) \cdot e^{3x}$$

$$h'(x) = x^2 \cdot (3e^{3x}) + (2x) \cdot e^{3x}$$

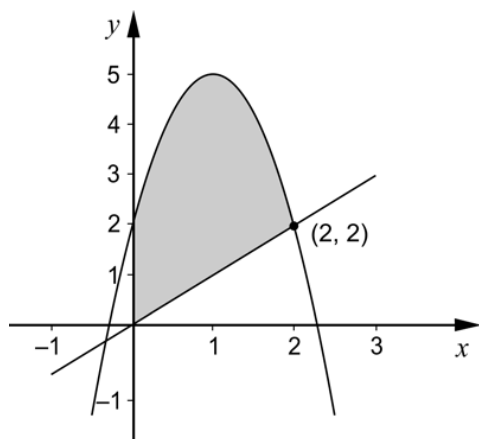
$$h'(x) = (3x^2 + 2x) \cdot e^{3x}$$

Svar c) $h'(x) = (3x^2 + 2x) \cdot e^{3x}.$

Del I # 3 (2/0) Beräkna områdets area

3. Figuren visar ett område som begränsas av y-axeln, kurvan $y = 6x - 3x^2 + 2$ och linjen $y = x$. Beräkna områdets area.

(2/0)



Den övre funktionen är $y = 6x - 3x^2 + 2$ och den undre är $y = x$. Integralen som ska lösas är

$$A = \int_0^2 \underbrace{(6x - 3x^2 + 2)}_{\text{övre}} - \underbrace{x}_{\text{undre}} dx.$$

där integrationsgränserna är $x = 0$ och $x = 2$. Förenkla och integrera

$$A = \int_0^2 (5x - 3x^2 + 2) dx$$

$$A = \left[5\frac{x^2}{2} - 3\frac{x^3}{3} + 2x \right]_0^2 = \left[\frac{5}{2}x^2 - x^3 + 2x \right]_0^2 = \frac{5}{2}2^2 - 2^3 + 2 \cdot 2 = 6$$

Svar 6 a.e.

Del I # 4 (2/0) Primitiv funktion

4. Bestäm den primitiva funktion $F(x)$ till $f(x) = \frac{2}{x} + 3$ som uppfyller villkoret $F(1) = 5$

(2/0)

Använd FORMELSAMLINGEN där finns primitiva funktioner.

Primitiva funktioner	Funktion	Primitiv funktion
	k	$kx + C$
	$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C \quad (x > 0)$

$$F(x) = \ln x + 3x + C$$

Bestäm C .

$$\overbrace{F(1)=5}^{F(1)=5} = \overbrace{\ln 1}^{???} + 3 \cdot \overbrace{1}^{x=1} + C$$

Vad är $\ln 1$? Använd FORMELSAMLINGEN, där finns definitionen av naturliga logaritmen.

Logaritmer	$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$	<u>$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$</u>	
	$\lg x + \lg y = \lg xy$	$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$	$\lg x^p = p \cdot \lg x$

Det x som passar till $1 = e^x \Leftrightarrow x = \ln 1$ är $x = 0$. Vi får

$$\overbrace{F(1)=5}^{F(1)=5} = \overbrace{\ln 1=0}^{\ln 1=0} + 3 \cdot \overbrace{1}^{x=1} + \underbrace{C}_{C=2}$$

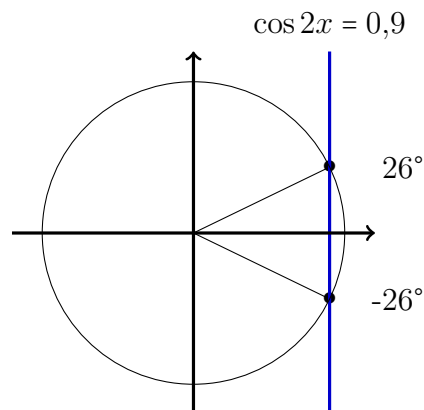
Svar Primitiv funktion är $F(x) = \ln x + 3x + 2$

Del I # 5 (2/1) Lös ekvationen

5. Lös ekvationen $\cos 2x = 0,9$ om $\cos 26^\circ = 0,9$

(2/1)

Rita enhetscirkel. Lös ekvationen $\cos 2v = 0,9$.



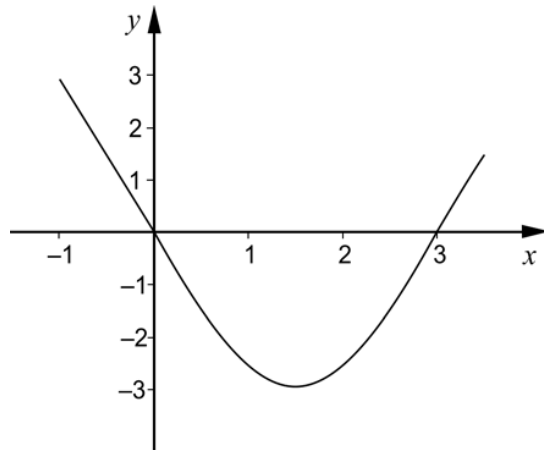
$$2x = \pm 26^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x = \pm 13^\circ + n \cdot 180^\circ$$

Svar $x = \pm 13^\circ + n \cdot 180^\circ$

Del I # 6 (1/0) Ordna integraler

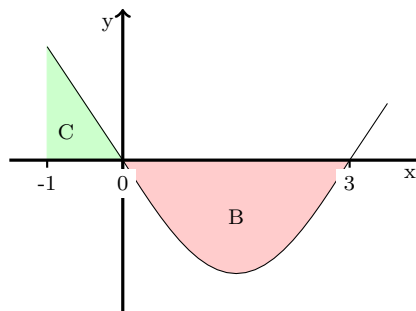
6. Figuren visar grafen till funktionen f .



Ordna talen A , B och C i storleksordning. Börja med det *minsta*.

$$A = \int_{-1}^3 f(x) dx \quad B = \int_0^3 f(x) dx \quad C = \int_{-1}^0 f(x) dx \quad \text{Endast svar fordras} \quad (1/0)$$

Integral är övre minus undre funktion.



$$\underbrace{\int_{-1}^3 f(x) dx}_A = \underbrace{\int_{-1}^0 f(x) dx}_{C>0} + \underbrace{\int_0^3 f(x) dx}_{B<0}$$

Svar $B < A < C$.

Del I # 7 (0/2) Beräkna integral

7. För funktionen f gäller att $f(2) = 3$ och $f'(x) = 0,5$ för alla x .

Beräkna $\int_2^6 f(x) dx$.

(0/2)

Använd FORMELSAMLINGEN sidan 4

Primitiva funktioner	Funktion	Primitiv funktion
	k	$kx + C$
	$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Integrera f'

$$f(x) = 0,5x + C.$$

Bestäm integrationskonstanten C

$$\overbrace{f(x)}^{f(2)=3} = 0,5 \cdot \overbrace{x}^{x=2} + \underbrace{C}_{C=2}.$$

Beräkna integralen

$$\int_2^6 (0,5 \cdot x + 2) dx = \left[0,5 \frac{x^2}{2} + 2 \cdot x \right]_2^6 = \underbrace{\left(0,5 \frac{6^2}{2} + 2 \cdot 6 \right)}_{21} - \underbrace{\left(0,5 \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right)}_5 = 16$$

Svar 16

Del I # 8 (0/1/⊗) Trigonometriskt bevis

8. Visa att $\frac{\sin 2\nu + \sin \nu}{2 \cos \nu + 1} = \sin \nu$

för alla ν där uttrycken i båda led är definierade.

(0/1/⊗)

Arbetsgången vid problem av denna typ är att arbeta med vänsterled (VL) och högerled (HL) var för sig. En bra strategi är att försöka förenkla den sida som ser mest komplicerad ut. Använd FORMELSAMLINGEN och byt ut $\sin 2\nu$ i VL.

Trigonometriska formler

$$\sin^2 \nu + \cos^2 \nu = 1$$

$$\sin(\nu + u) = \sin \nu \cos u + \cos \nu \sin u$$

$$\sin(\nu - u) = \sin \nu \cos u - \cos \nu \sin u$$

$$\cos(\nu + u) = \cos \nu \cos u - \sin \nu \sin u$$

$$\cos(\nu - u) = \cos \nu \cos u + \sin \nu \sin u$$

$$\underline{\sin 2\nu = 2 \sin \nu \cos \nu}$$

$$\cos 2\nu = \begin{cases} \cos^2 \nu - \sin^2 \nu & (1) \\ 2 \cos^2 \nu - 1 & (2) \\ 1 - 2 \sin^2 \nu & (3) \end{cases}$$

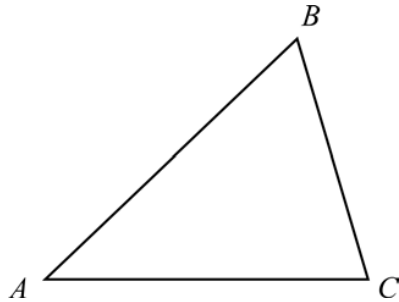
$$a \sin x + b \cos x = c \sin(x + \nu) \text{ där } c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ och } \tan \nu = \frac{b}{a}$$

$$\text{VL} = \frac{\overbrace{\sin 2\nu}^{2 \sin \nu \cos \nu} + \sin \nu}{2 \cos \nu + 1} = \frac{2 \sin \nu \cos \nu + \sin \nu}{2 \cos \nu + 1} = \frac{(2 \cos \nu + 1) \sin \nu}{2 \cos \nu + 1} = \sin \nu$$

Nu gäller att VL = HL. VSV (Vilket Skulle Visas).

Del I # 9 (0/3/⊗) Trigonometri

9. I den spetsvinkliga triangeln ABC är $\sin A = 0,6$



- a) Bestäm värdet av $\sin(B + C)$ (0/1)
- b) Bestäm värdet av $\cos(B + C)$ (0/2/⊗)

För trianglar gäller att vinkelsumman är 180° . Då gäller

$$180^\circ = A + B + C$$
$$B + C = 180^\circ - A$$

I FORMELSAMLINGEN finns additionssatserna för sinus och cosinus.

**Trigonometriska
formler**

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

$$\sin(v+u) = \sin v \cos u + \cos v \sin u$$

$$\sin(v-u) = \sin v \cos u - \cos v \sin u$$

$$\cos(v+u) = \cos v \cos u - \sin v \sin u$$

$$\cos(v-u) = \cos v \cos u + \sin v \sin u$$

$$\sin 2v = 2 \sin v \cos v$$

$$\cos 2v = \begin{cases} \cos^2 v - \sin^2 v & (1) \\ 2\cos^2 v - 1 & (2) \\ 1 - 2\sin^2 v & (3) \end{cases}$$

$$a \sin x + b \cos x = c \sin(x+v) \text{ där } c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ och } \tan v = \frac{b}{a}$$

a) Bestäm värdet av $\sin(B+C) = \sin(180^\circ - A)$

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - A) &= \overbrace{\sin 180^\circ}^{\sin 180^\circ=0} \cdot \cos A - \overbrace{\cos 180^\circ}^{\cos 180^\circ=-1} \cdot \sin A \\ \sin(180^\circ - A) &= \sin A \end{aligned}$$

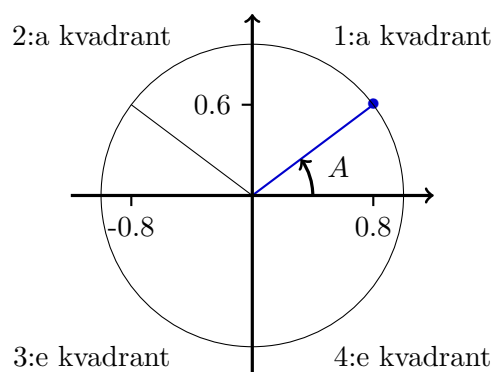
Svar a) $\sin(B+C) = 0,6$

b) Bestäm värdet av $\cos(B+C) = \cos(180^\circ - A)$

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - A) &= \overbrace{\cos 180^\circ}^{\cos 180^\circ=-1} \cdot \cos A + \overbrace{\sin 180^\circ}^{\sin 180^\circ=0} \cdot \sin A \\ \cos(180^\circ - A) &= -\cos A \end{aligned}$$

Bestäm $\cos A$ då vinkeln A är spetsvinklig och ligger i 1:a kvadranten. Rita enhetscirkel. Använd trigonometriska ettan för att beräkna numeriskt värde av $\cos A$.

$$1 = \underbrace{\cos^2 A}_{\cos A=\pm 0,8} + \overbrace{\sin^2 A}^{\sin A=0,6}$$



$$\cos(180^\circ - A) = -0,8$$

Svar a) $\cos(B + C) = -0,8$

Del I # 10 (0/2/⊗) Beräkna integral

10. Timo och Peder har fått i uppgift att lösa följande problem utan räknare:

$F(x) = (x+2)(x-2)^3$ är en primitiv funktion till $f(x) = 4(x+1)(x-2)^2$

Beräkna $\int_{-2}^3 (x+1)(x-2)^2 dx$

Timo säger att han först tänker utveckla $(x+1)(x-2)^2$ och sedan beräkna integralen. Peder påstår att det finns ett snabbare sätt att lösa uppgiften.

a) Beskriv en metod som Peder kan ha tänkt använda. (0/1/⊗)

b) Lös uppgiften med valfri metod. (0/1)

a och b) När den primitiva funktionen är känd kan integralen enkelt beräknas.

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = [F(x)]_{-2}^3 = [(x+2)(x-2)^2]_{-2}^3 = 5 - 0$$

Det skiljer en faktor 4 mellan känd funktion och önskad funktion.

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = 4 \underbrace{\int_{-2}^3 (x+1)(x-2)^2 dx}_{\frac{5}{4}} = 5$$

Svar Integralen är $\frac{5}{4}$.

Del I # 11

(2/4/⊗)

Jämför integraler

Vid bedömningen av ditt arbete med denna uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:

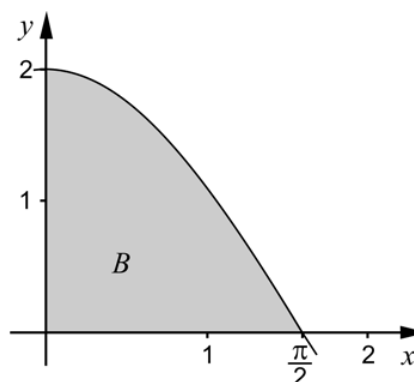
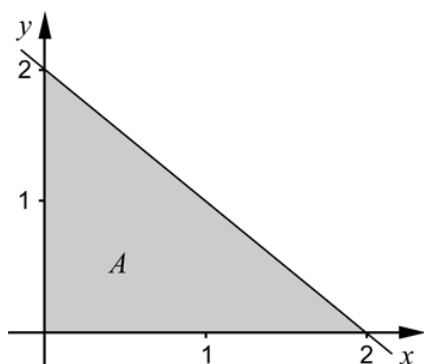
- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur långt mot en generell lösning du kommer
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

11. I den här uppgiften ska du jämföra storleken av areorna av två områden A och B .

Område A begränsas av positiva y -axeln, positiva x -axeln och linjen $y = 2 - kx$

Område B begränsas av positiva y -axeln, positiva x -axeln och kurvan $y = 2 \cos kx$

Nedan visas areorna som bildas när $k = 1$



- Beräkna arean av de skuggade områdena A och B när $k = 1$, det vill säga då $y = 2 - x$ och $y = 2 \cos x$
- Skriv av nedanstående tabell och beräkna de värden som saknas.

k	Arean av A	Arean av B
1		
2		
3		

- Jämför areorna av områdena A och B för samma värde på k . Formulera en slutsats av din jämförelse.
- Visa att din slutsats gäller för alla $k > 0$

(2/4/⊗)

Beräkna ytan av området A för godtyckligt k . Börja med att bestämma integrationsgränser. Nedre integrationsgräns är $x = 0$ och övre ges av

$$0 = 2 - k \cdot \underbrace{x}_{x=\frac{2}{k}}$$

Arean blir

$$\begin{aligned} A(k) &= \int_0^{\frac{2}{k}} (2 - kx) \, dx \\ &= \left[2x - k \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{2}{k}} \\ &= 2 \frac{2}{k} - \frac{k}{2} \left(\frac{2}{k} \right)^2 = \frac{2}{k} \end{aligned}$$

Upprepa samma strategi för ytan B . Övre integrationsgränsen blir

$$0 = 2 \cos kx$$

$$\frac{\pi}{2} = kx$$

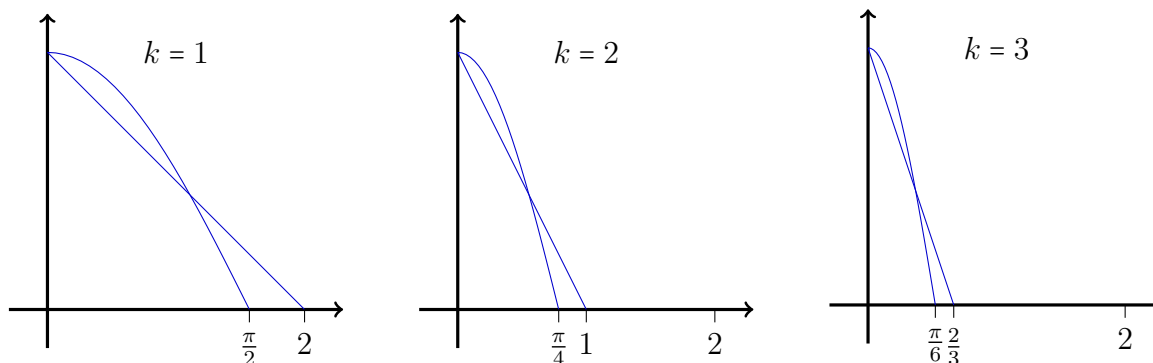
$$x = \frac{\pi}{2k}.$$

Arean blir

$$\begin{aligned} B(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2k}} 2 \cos kx \, dx \\ B(k) &= \left[2 \frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\frac{\pi}{2k}} = \frac{2}{k} \end{aligned}$$

Svar Ytorna är lika.

Kommentar Figurerna illustrerar ytorna för fallen $k = 1, 2$ och 3 .

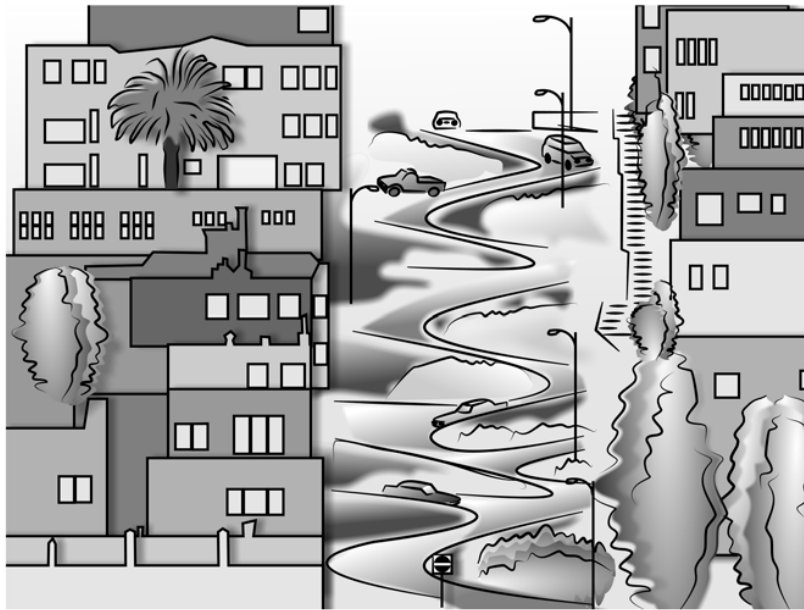


Del II # 12

(2/0)

Lombard street

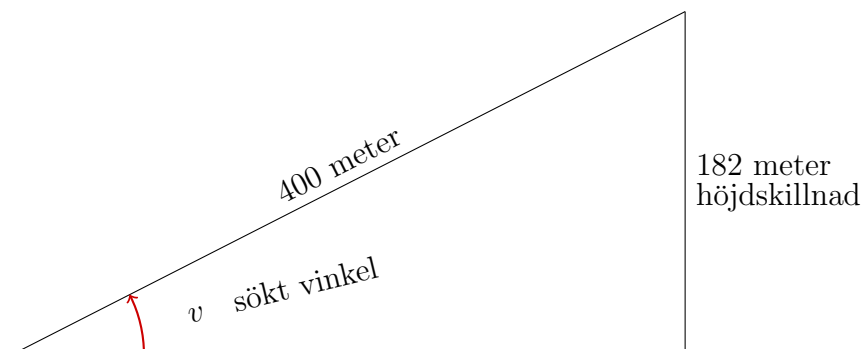
12. Lombard Street i San Fransisco är berömd för att den ligger på en sluttning som är så brant att vägen anlagts i sicksack.



Den brantaste delen av sluttningen är 400 meter lång och på den sträckan är höjdskillnaden 182 meter.

Hur många grader lutar sluttningen mot horisontalplanet?

(2/0)



$$\tan v = \frac{182}{400}$$

$$v = \tan^{-1} \frac{182}{400} = 27^\circ$$

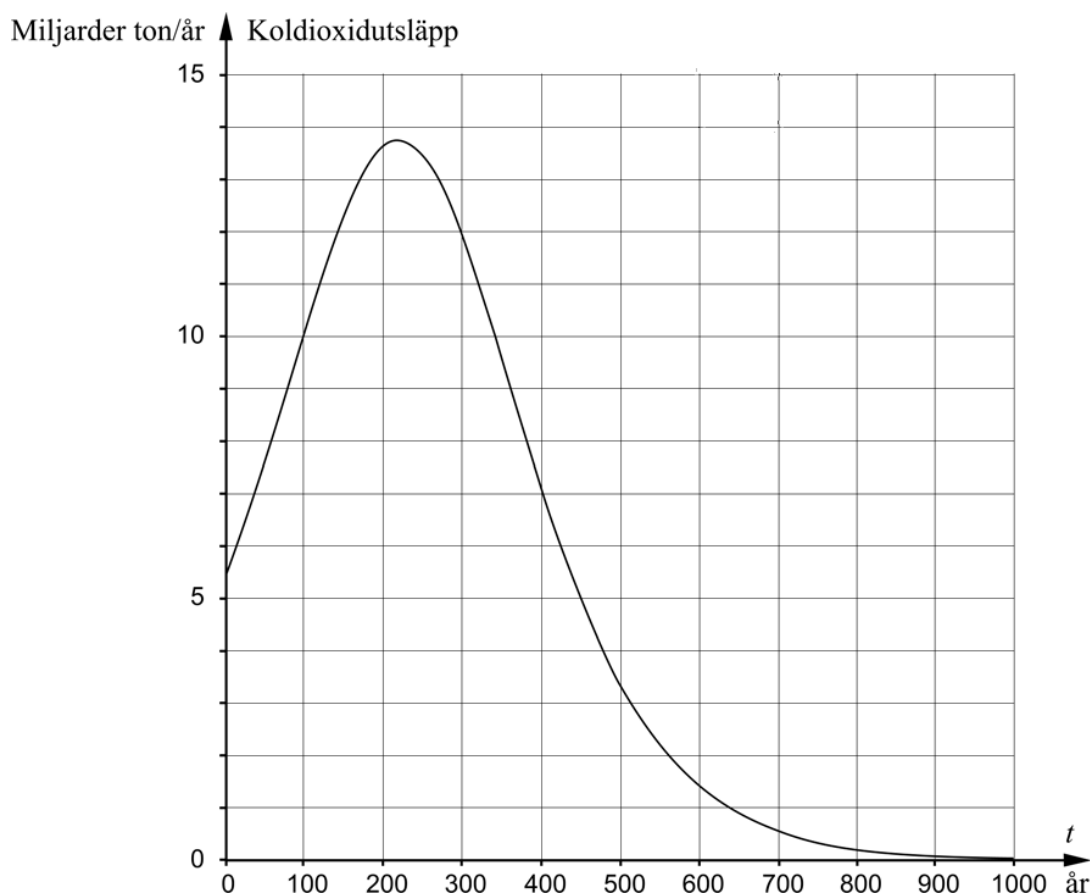
Svar 27°

Del II # 13

(2/0)

Koldioxidutsläpp

13. En prognos för de årliga koldioxidutsläppen i världen för de kommande tusen åren beskrivs med hjälp av grafen nedan. Tiden $t = 0$ motsvarar år 2000.

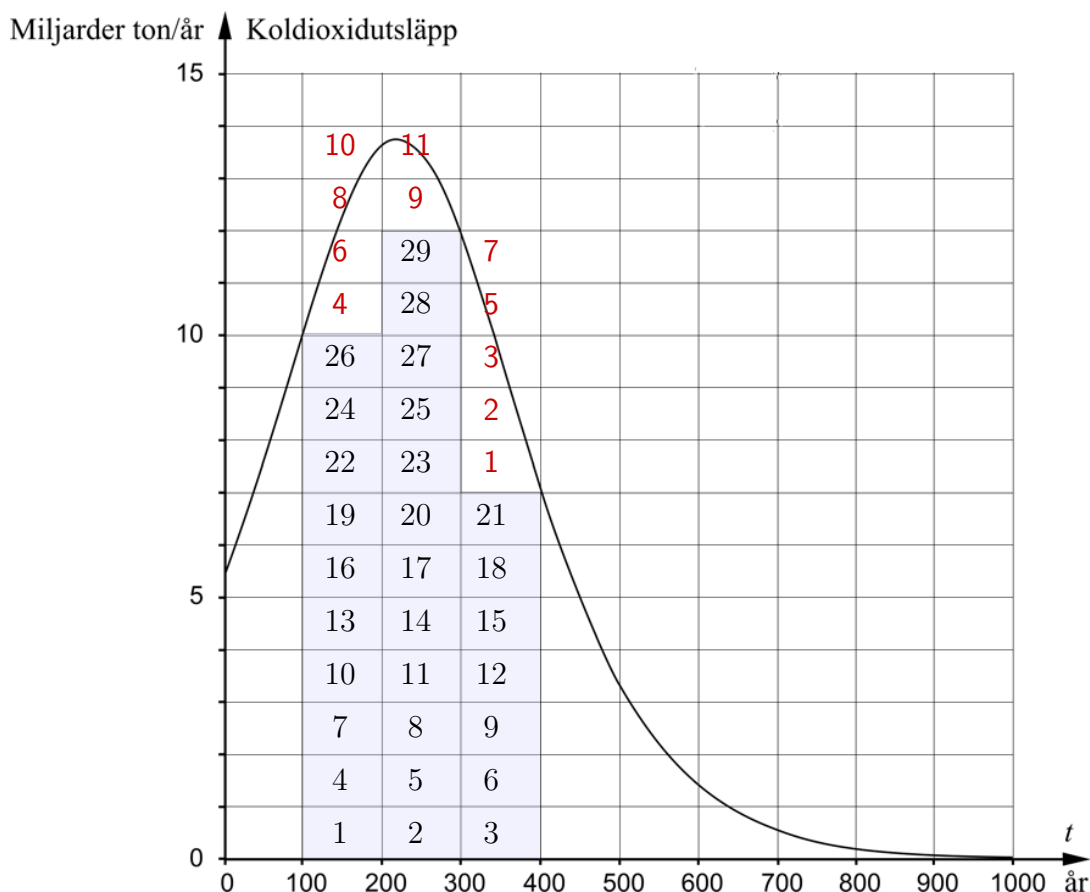


Uppskatta med hjälp av grafen hur mycket koldioxid som kommer att släppas ut mellan åren 2100 och 2400.

(2/0)

Uppgiften är att uppskatta hur mycket koldioxid som kommer att släppas ut mellan åren 2100 och 2400. På y -axeln finns utsläpp i miljarder ton per år och på x -axeln tid i år. Sökt utsläpp motsvarar ytan under kurvan mellan integrationsgränserna år 2100 och 2400.

Varje ruta i grafen motsvarar ett utsläpp av 100 miljarder ton koldioxid. Räkna antalet hela rutor under kurvan och antalet delade rutor.



Det finns 29 hela rutor och 11 delade rutor. Uppskatta att de delade rutorna i medeltal är hälften av en hel ruta. Uppskattningen blir $29 + \frac{1}{2} 11 = 34,5$ rutor eller 3450 miljarder ton koldioxid.

Svar 3450 miljarder ton koldioxid.

Kommentar Skolverkets rättningsnorm

13.

Max 2/0

Godtagbar ansats, t ex uppskattar arean med hjälp av ruträkning
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar
(3300–3600 miljarder ton)

+1 g

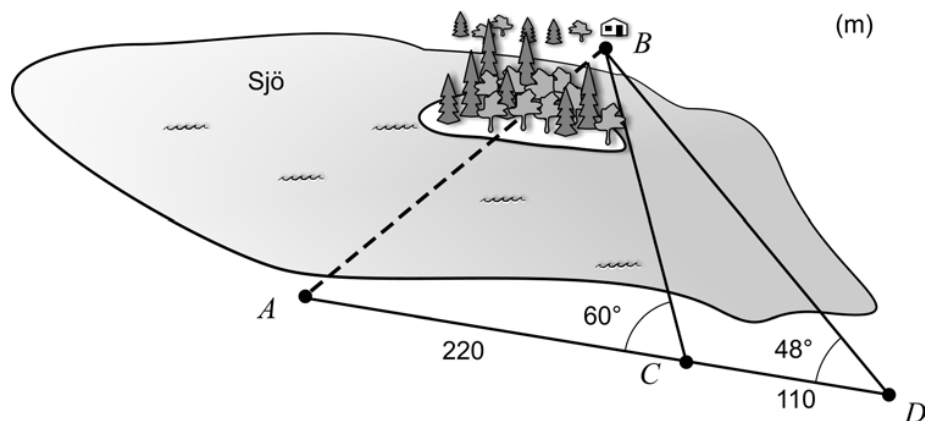
+1 g

Del II # 14

(2/1)

Avstånd mellan två punkter

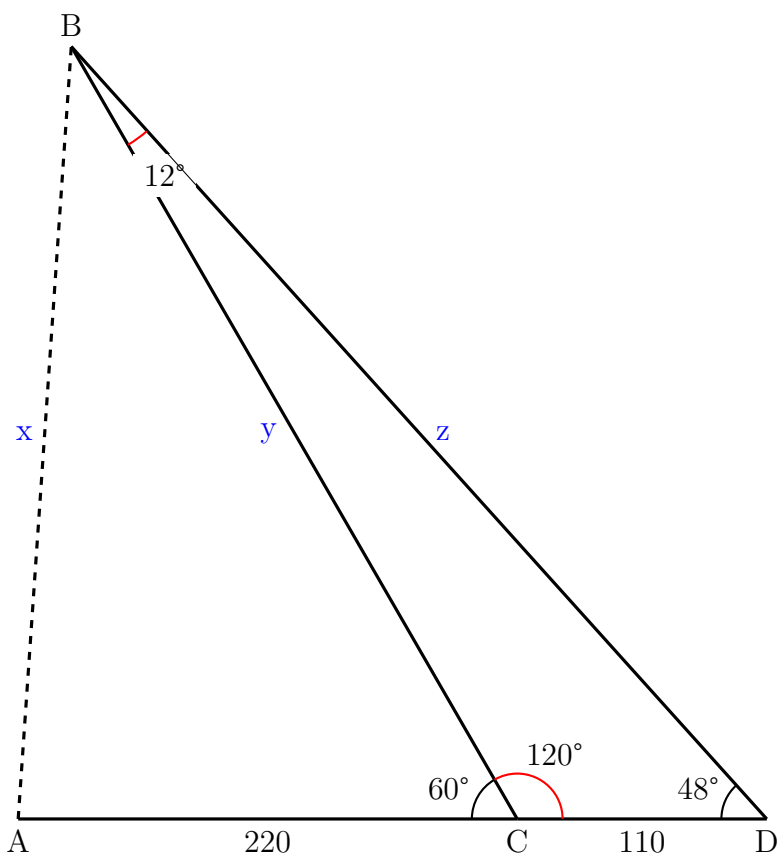
14. Avståndet mellan de två punkterna A och B på var sin sida om en sjö ska bestämmas, se figur.



En lantmätare som befinner sig i A kan inte se B som skymms av en trädbevuxen holme i sjön. Från de två punkterna C och D , som tillsammans med A ligger längs en rät linje, kan hon se B . Hon mäter upp vinkeln ACB till 60° och vinkeln ADB till 48° samt sträckan AC till 220 m och sträckan CD till 110 m.

Beräkna avståndet AB .

(2/1)



Inför x , y och z enligt figuren. Bestäm vinklarna i triangeln BCD . Den efterfrågade sträckan x kan beräknas med hjälp av cosinusteoremet för någon av triangelarna ABC eller ABD . Sträckan y eller z som krävs för cosinusteoremet kan bestämmas med sinusteoremet för triangeln BCD .

$$\frac{\sin 12^\circ}{110} = \frac{\sin 48^\circ}{y} = \frac{\sin 120^\circ}{z}$$

$$z = 110 \frac{\sin 120^\circ}{\sin 12^\circ} = 458$$

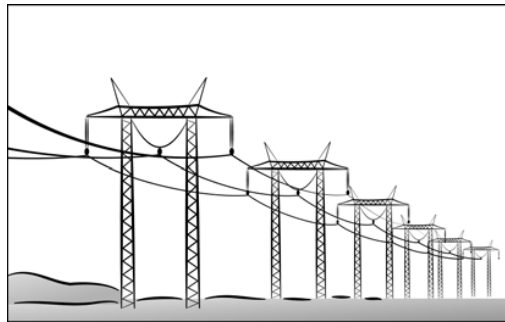
$$\underbrace{x^2}_{x=341} = 330^2 + \overbrace{z^2 - 2 \cdot 330 \cdot z \cdot \cos 48^\circ}^{z=458}$$

Svar Avståndet är 340 m.

Kommentar Med två siffror i indata är det rimligt att ge två siffror i utdata.

Del II # 15 (1/2) Luftledning i blåst

15. Luftledningar tål större strömbelastning då det blåser.



För en viss luftledning ges den tillåtna strömbelastningen av funktionen

$$S(x) = 342 \cdot (1 + 4x)^{0,25}$$

där x är vindstyrkan i m/s och $S(x)$ är den tillåtna strömbelastningen i ampere, A.

- a) Bestäm den tillåtna strömbelastningen när det är vindstilla. (1/0)
- b) Vid vilken vindstyrka ökar den tillåtna strömbelastningen med en hastighet av 50 A/(m/s) ? (0/2)

a) Vindstilla betyder att $x = 0$ m/s. Då blir tillåten strömbelastning

$$\underbrace{S(0)}_{342} = 342 \cdot \overbrace{(1 + 4x)^{0,25}}^{x=0}$$

Svar a) Tillåten strömbelastning vid vinstilla är 342 A.

b) Tillåten strömbelastning ökar med ökande vindstyrka. När är derivatan 50 A/(m/s)? Deriver funktionen.

$$S(x) = 342 \cdot (1 + 4x)^{0,25}$$

Använd FORMELSAMLINGEN. Där finns räkneregler för derivering av potensfunktionen

Derivator	Funktion	Derivata	
	x^n där n är ett reellt tal	nx^{n-1}	

och kedjeregeln.

Kedjeregeln	Om $y = f(z)$ och $z = g(x)$ är två deriverbara funktioner så gäller för $y = f(g(x))$ att $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ eller $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$
--------------------	---

Den inre funktionen är $4x$ med derivatan 4 Vi får

$$S'(x) = 342 \cdot 0,25 \cdot (1 + 4x)^{-0,75} \cdot 4.$$

Lös

$$50 = 342 \cdot 0,25 \cdot (1 + 4x)^{-0,75} \cdot 4.$$

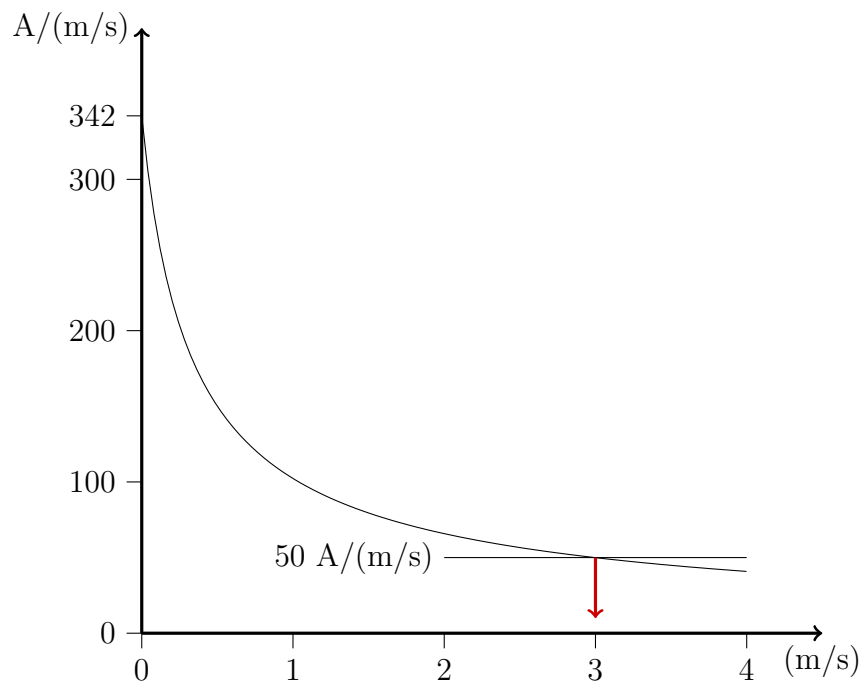
Förenkla

$$(1 + 4x)^{0,75} = \frac{342}{50}$$

$$1 + 4x = \left(\frac{342}{50}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$x = \frac{1}{4} \left(\frac{342}{50}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{4} = 2,995997$$

Svar b) Den efterfrågade derivatan är 50 A/(m/s) när vindstyrkan är 3 m/s.

Alternativ numerisk lösning

Del II # 16

(1/1)

Bestäm funktion

16. Bestäm en funktion på formen $y = A \sin kx + B$ som uppfyller villkoren nedan:

- $A > 0$
- värdemängden är $-4 \leq y \leq 2$
- de lokala maximipunkterna har x -koordinaterna $x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}$ för alla heltal n (1/1)

Givet $A > 0$ och att $-1 \leq \sin kx \leq 1$ får vi följande ekvationer

$$y_{\max} = 2 = A + B$$

$$y_{\min} = -4 = -A + B$$

som har lösningen

$$A = 3$$

$$B = -1.$$

Återstår att bestämma k . Perioden hos $\sin kx$ är

$$\text{period} = \frac{2\pi}{k}.$$

Enligt uppgiften är perioden $\frac{\pi}{2}$ vilket ger

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{k}$$

med lösningen

$$k = 4.$$

Svar $y = 3 \sin 4x - 1$

Del II # 17 (1/2/⊗) Triangel

17.

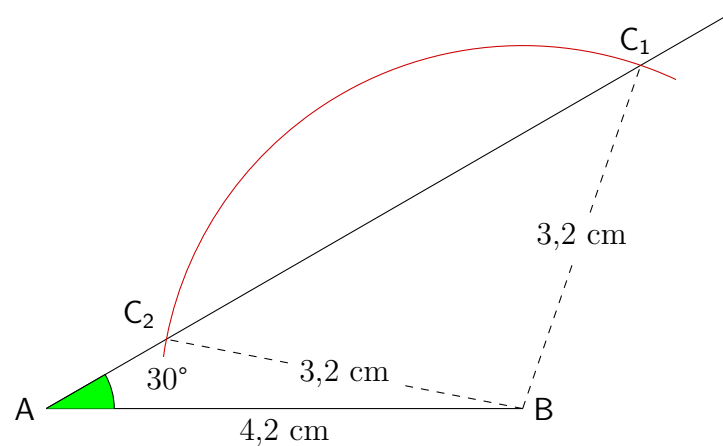


Armand arbetar som silversmed och hans specialitet är smycken i form av olika geometriska figurer. Han har bestämt sig för att göra ett smycke i form av en triangel. Till sitt förfogande har han en 9,0 cm lång silvertråd som han kan böja och klippa.

Armand betecknar triangeln ABC och bestämmer sig för att vinkeln A ska vara 30° , sidan AB 4,2 cm och sidan BC 3,2 cm.

Utred på vilket eller vilka sätt smycket kan utformas.

(1/2/⊗)



Två sidor är kända. Antag att den tredje sidan är x lång. Cosinussatsen ger följande.

$$3,2^2 = 4,2^2 + x^2 - 2 \cdot 4,2 \cdot x \cos 30^\circ \quad (1)$$

$$0 = \underbrace{x^2 - 2 \cdot 4,2 \cos 30^\circ x}_{p=-7,2746} + \underbrace{4,2^2 - 3,2^2}_{q=7,4}$$

$$x_{1,2} = \frac{7,2746}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7,2746}{2}\right)^2 - 7,4}$$

$$x_1 = 6,0518 \quad (2)$$

$$x_2 = 1,2228 \quad (3)$$

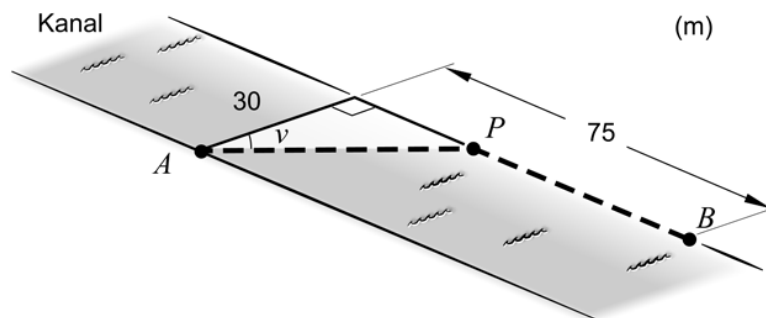
Endast roten x_2 är intressant då triangelns tredje sida kan längst vara $9 - 4,2 - 3,2 = 1,6$ cm.

Svar Triangeln är entydigt bestämd av sina tre sidor 1,2 cm, 3,2 cm respektive 4,2 cm.

Kommentar Cosinusteoremet är lämpligare att använda än sinusteoremet vid triangelberäkningar. Cosinusteoremet ger alltid en entydig vinkel där sinusteoremet ger två alternativ. I detta exempel beräknas en okänd sida med cosinusteoremet och 2:a gradsekvationen ger naturligt två olika alternativ.

Del II # 18 (0/3/⊗) Kabeldragning, minsta kostnad

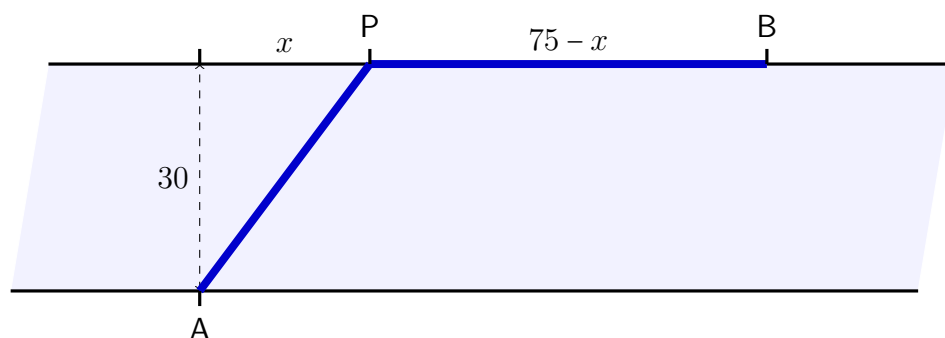
18. Punkterna A och B ligger på var sin sida av en 30 m bred kanal, se figur.



En kabel ska dras från punkt A till punkt B . Kabeln ska först gå genom vattnet till en punkt P och därefter på land längs kanalens kant till punkt B .

Kostnaden för kabeldragningen är 2500 kr/m i vattnet och 1500 kr/m på land.

Bestäm vinkeln v så att kostnaden för kabeldragningen blir så liten som möjligt. (0/3/⊗)



Lösning, variant v

Skapa kriteriefunktionen.

$$AP = \frac{30}{\cos v}$$

$$x = 30 \cdot \tan v$$

$$PB = 75 - x$$

$$f(v) = \frac{30}{\cos v} \cdot 2500 + (75 - 30 \tan v) \cdot 1500$$

Minimera kriteriefunktionen.

$$\begin{aligned}
 f(v) &= 30 \cdot (\cos v)^{-1} \cdot 2500 + (75 - 30 \tan v) \cdot 1500 \\
 f'(v) &= 30 \cdot (-1) \cdot (\cos v)^{-2} \cdot (-\sin v) \cdot 2500 + \left(-30 \frac{1}{\cos^2 v}\right) \cdot 1500 \\
 f'(v) &= \frac{30 \cdot 2500}{\cos^2 v} (\sin v - 0,6) \\
 v &= \sin^{-1} 0,6 = 36,8698976458440^\circ
 \end{aligned}$$

Med två signifikanta siffror i indata är det rimligt att svara med två siffror.

Svar Vinkeln som ger minimal kostnad är 37° .

Lösning, variant x

Skapa kriteriefunktionen.

$$\begin{aligned}
 AP &= \sqrt{30^2 + x^2} \\
 PB &= 75 - x \\
 f(x) &= \sqrt{30^2 + x^2} \cdot 2500 + (75 - x) \cdot 1500 \\
 f(x) &= (900 + x^2)^{0,5} \cdot 2500 + (75 - x) \cdot 1500
 \end{aligned}$$

Minimera kriteriefunktionen.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0,5 \cdot (900 + x^2)^{-0,5} \cdot 2x \cdot 2500 + (-1) \cdot 1500 \\
 f'(x) &= 2500 \left(\frac{x}{\sqrt{900 + x^2}} - 0,6 \right) = 2500 \left(\frac{x - 0,6 \cdot \sqrt{900 + x^2}}{\sqrt{900 + x^2}} \right)
 \end{aligned}$$

txttxtxt

$$\begin{aligned}
 x &= 0,6 \cdot \sqrt{900 + x^2} \\
 x^2 &= 0,36 \cdot (900 + x^2) \\
 0,64x^2 &= 0,36 \cdot 900 \\
 x^2 &= \frac{0,36}{0,64} \cdot 900 = \frac{36}{64} \cdot 900 \\
 x &= \frac{6}{8} \cdot 30 = 22,5 \\
 \tan v &= \frac{22,5}{30} = 0,75 \\
 v &=
 \end{aligned}$$

$$\arctan 0,75 \approx 37^\circ$$

Svar Vinkeln som ger minimal kostnad är 37° .