

Innehåll

Förord	2
Förslag på lösningar till D-kursprov vt 2005	3
Del I: Digitala verktyg är INTE tillåtna	3
Del I # 1 (2/0) Bestämd integral	3
Del I # 2 (2/1) Derivera	4
Del I # 3 (0/1) 3 Primitiv funktion	5
Del I # 4 (1/1) Ordna tal	6
Del I # 5 (1/1) Bestäm konstanter	8
Del I # 6 (0/1) Förenkla uttryck	9
Del I # 7 (1/1) Starar	11
Del I # 8 (0/1/⊗) Trigonometri bevis	12
Del I # 9 (0/2/⊗) Integral	13
Del I: Digitala verktyg är tillåtna	15
Del II # 10 (2/0) Area hos triangel	15
Del II # 11 (3/0) Area	16
Del II # 12 (2/2) Area hos fyrhörning	18
Del II # 13 (2/1) Samtliga lösningar	20
Del II # 14 (1/1) Antal lösningar	21
Del II # 15 (0/4/⊗) Korrugerad plåt	22
Del II # 16 (1/2/⊗) Lokalt maximum	25
Del II # 17 (3/4/⊗) En parabel och en rektangel	26
Appendix, D-kursproblem	28
Del II # 15 (0/4/⊗) Korrugerad plåt	28

Förord

Uppgifter till kursen Matematik D duger utmärkt för träning till kursen Ma4.

Kom ihåg

- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan

- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Förslag på lösningar till D-kursprov vt 2005

Del I # 1 (2/0) Bestämd integral

1. Beräkna $\int_1^3 (x^2 - 1) dx$	(2/0)
---------------------------------------	-------

$$\int_1^3 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{27}{3} - 3 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{20}{3}$$

Svar Den bestämda integralen är $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$.

Del I # 2 (2/1) Derivera**2.** Bestäm $f'(x)$ om

a) $f(x) = 4 \cos 3x$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $f(x) = (3 - 2x)^6$ *Endast svar fordras* (1/0)

c) $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$ *Endast svar fordras* (0/1)

a) Använd kedjeregeln i FORMELSAMLINGEN $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$f(x) = 4 \cos 3x$$

$$f'(x) = 4(-\sin 3x) \cdot 3 = -12 \sin 3x$$

Svar a) $f'(x) = -12 \sin 3x$

b) Använd kedjeregeln i FORMELSAMLINGEN $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$f(x) = (3 - 2x)^6$$

$$f'(x) = 6(3 - 2x)^5 \cdot (-2) = -12(3 - 2x)^5$$

Svar b) $f'(x) = -12(3 - 2x)^5$

c) Använd produktregeln i FORMELSAMLINGEN $\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

$$f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{3x} + x^2 \cdot e^{3x} \cdot 3 = (2x + 3x^2) e^{3x}$$

Svar c) $f'(x) = (2x + 3x^2) e^{3x}$

Del I # 3 (0/1) 3 Primitiv funktion

3. Vilka två av funktionerna $F(x)$ nedan är primitiv funktion till $f(x) = 3x^5 + 1$? *Endast svar fordras* (1/0)

A $F(x) = \frac{3x^4}{4}$

B $F(x) = 15x^4$

C $F(x) = 0,5x^6 + x$

D $F(x) = x^6 + 2x$

E $F(x) = \frac{x^6}{3} + x + 1$

F $F(x) = \frac{x^6}{2} + x - 14$

Integrera

$$f(x) = 3x^5 + 1$$

$$F(x) = \frac{3x^6}{6} + x + \text{konstant} = \frac{x^6}{2} + x + \text{konstant}$$

Svar Alternativ C (med konstant = 0) och F (med konstant = -14).

Kommentar Du kan också derivera funktionerna A – F.

Del I # 4 (1/1) Ordna tal

4. Ordna följande tal i storleksordning:
 $a = \sin 24^\circ$, $b = \cos 100^\circ$ och $c = \sin 165^\circ$
 Motivera ditt svar.

(1/1)

Använd FORMELSAMLINGEN

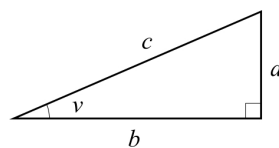
Trigonometri

Definitioner

$$\sin v = \frac{a}{c}$$

$$\cos v = \frac{b}{c}$$

$$\tan v = \frac{a}{b}$$

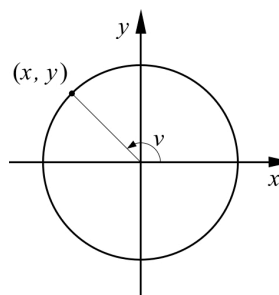


Enhetscirkeln

$$\sin v = y$$

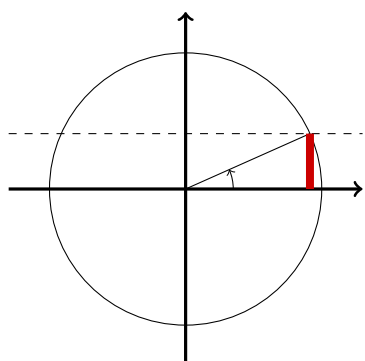
$$\cos v = x$$

$$\tan v = \frac{y}{x}$$

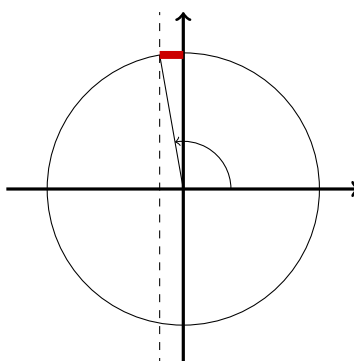


Rita alltid enhetscirkel när du har sin, cos och tan utanför första kvadranten.

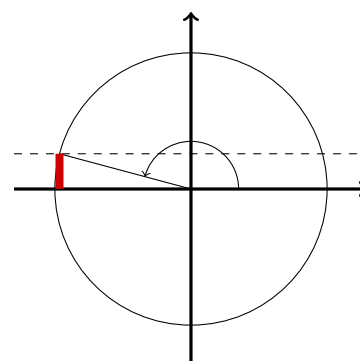
$$\sin 24^\circ > 0$$



$$\cos 100^\circ < 0$$



$$\sin 165^\circ = \sin 15^\circ > 0$$



Svar $\cos 100^\circ < \sin 165^\circ < \sin 24^\circ$.

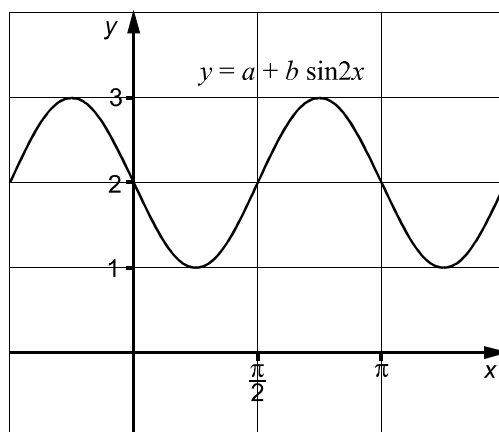
Del I # 5 (1/1) Bestäm konstanter

5. Figuren visar grafen till funktionen $y = a + b \sin 2x$

Bestäm konstanterna a och b .

Endast svar fordras

(1/1)



Bestäm parametrarna i funktionen

$$y(x) = a + b \sin 2x.$$

För $x = 0$ gäller

$$\overbrace{y(0)}^{2 \text{ från grafen}} = \underbrace{a}_2 + b \cdot \overbrace{\sin 0}^0$$

vilket ger

$$a = 2$$

och för $x = \frac{\pi}{4}$ gäller

$$\overbrace{y\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{-1 \text{ från grafen}} = 2 + \underbrace{b}_{-1} \cdot \overbrace{\sin \frac{\pi}{2}}^1$$

vilket ger

$$b = -1.$$

Svar $a = 2$ och $b = -1$.

Del I # 6 (0/1) Förenkla uttryck

6. Vilket av följande uttryck A – F kan förenklas till 1?

Endast svar fordras

(0/1)

A $(\sin x + \cos x)^2$

B $(\sin x - \cos x)^2$

C $(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)$

D $\cos x(\tan x \cdot \sin x + \cos x)$

E $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

F $2(\sin x + \cos x)$

Algebraisk lösning

$$\text{A)} (\sin x + \cos x)^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{\text{trigonometriska ettan}} + 2 \sin x \cdot \cos x \neq 1$$

$$\text{B)} (\sin x - \cos x)^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{\text{trigonometriska ettan}} - 2 \sin x \cdot \cos x \neq 1$$

$$\text{C)} (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) = \sin^2 x - \cos^2 x \neq 1$$

$$\text{D)} \cos x \left(\underbrace{\tan x}_{\frac{\sin x}{\cos x}} \cdot \sin x + \cos x \right) = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{\text{trigonometriska ettan}} = 1$$

$$\text{E)} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \neq 1$$

$$\text{F)} 2(\sin x + \cos x) \neq 1$$

Svar D kan förenklas till 1.

Numerisk lösning

I FORMELSAMLINGEN finns exakta värden för sinus, cosinus och tangens för några olika vinklar. För att visa att uttryck *inte* kan förenklas till 1 så räcker det att hitta ett motexempel.

Exakta värden	Vinkel v (grader)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	(radianer)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
	$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
	$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
	$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Testa uttrycken med lämplig vinkel. Välj $x = 45^\circ$, (andra vinklar kan också duga).

$$\text{A)} \underbrace{\left(\sin x + \cos x\right)^2}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \neq 1$$

$$\text{B)} \underbrace{\left(\sin x - \cos x\right)^2}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0 \neq 1$$

$$\text{C)} \underbrace{\left(\sin x + \cos x\right)^2}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{\left(\sin x - \cos x\right)^2}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \cdot 0 = 0 \neq 1$$

$$\text{D)} \underbrace{\cos x}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{\left(\tan x \cdot \sin x + \cos x\right)}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2}) = 1$$

$$\text{E)} \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \underbrace{\frac{\cos x}{\sin x}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 + 1 \neq 1$$

$$\text{F)} 2 \underbrace{\left(\sin x + \cos x\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2} \neq 1$$

Vi har visat att **A**, **B**, **C**, **E** och **F** inte kan förenklas till 1. Med stöd av problemets formulering kan vi dra slutsatsen att **D** kan förenklas till 1.

Svar **D** kan förenklas till 1.

Del I # 7 (1/1) Starar

7.



Antalet starar i Sverige har undersökts sedan 1979. Resultaten av denna undersökning kan matematiskt beskrivas med differentialekvationen:

$$\frac{dy}{dt} = -0,03 \cdot y, \text{ där } y \text{ är antalet starar vid tiden } t \text{ år från 1979.}$$

Förklara med egna ord innebörden av differentialekvationen i detta sammanhang. (1/1)

I Skolverkets norm för rättning står följande:

Godtagbar ansats, t ex anger att antalet starar minskar.	+1 g
Godtagbar förklaring ("Antalet starar har sedan år 1979 minskat med ändringshastigheten 3 % per år av det aktuella antalet")	+1 vg

Del I # 8 (0/1/⊗) Trigonometri bevis

8. I triangeln ABC är vinkeln $A = 90^\circ$
Visa att $\sin B = \cos C$

(0/1/⊗)

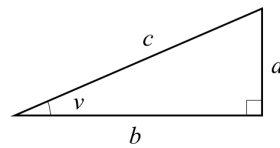
Enligt FORMELSAMLINGEN gäller följande

Definitioner

$$\sin v = \frac{a}{c}$$

$$\cos v = \frac{b}{c}$$

$$\tan v = \frac{a}{b}$$



Inför beteckningar enligt figuren. Enligt definitionen av sinus är

$$\sin B = \frac{b}{a}$$

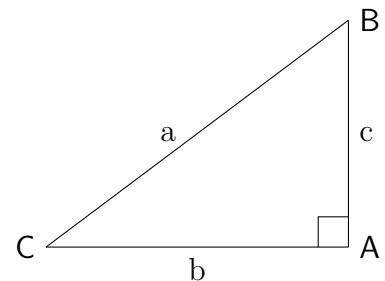
och enligt definitionen av cosinus gäller

$$\cos C = \frac{b}{a}$$

Alltså gäller

$$\sin B = \cos C$$

vilket skulle visas.



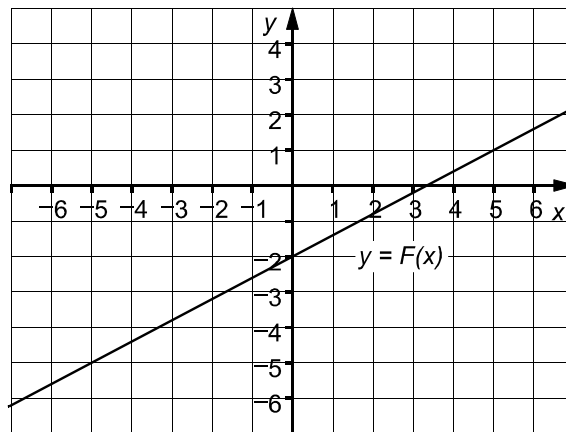
Svar Se ovan.

Del I # 9 (0/2/⊗) Integral

9. Funktionen F är primitiv funktion till f
Figuren nedan visar $y = F(x)$

Bestäm $\int_0^5 f(x) dx$

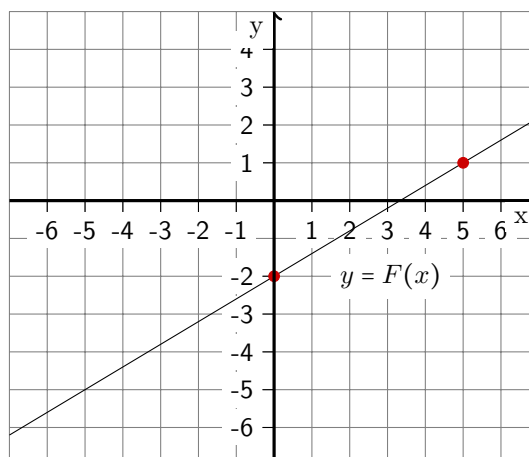
(0/2/⊗)



Lösning 1

$$\int_0^5 f(x) dx = F(x) \Big|_0^5 = \underbrace{1}_{F(5)} - \underbrace{(-2)}_{F(0)} = 3$$

där $F(5)$ och $F(0)$ avläses i figuren.



Svar Den bestämda integralen blir 3.

Lösning 2

Skolverkets rättningsnorm ger följande svar.

Redovisad godtagbar metod, t ex $\int_0^5 f(x) dx = \left. \frac{3}{5}x - 2 \right _0^5$	+1 vg
med godtagbart svar (3)	+1 vg

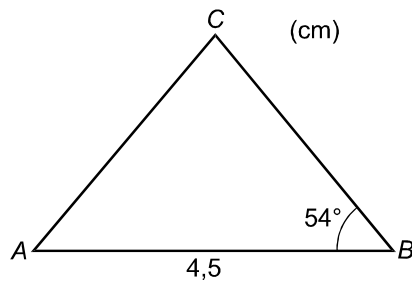
Svar Den bestämda integralen blir 3.

Kommentar Skolverkets lösning går omvägen via att bestämma funktionen på parametrisk form, $F(x) = \frac{3}{5}x - 2$, från grafen av $F(x)$. Detta är onödigt.

Del II # 10 (2/0) Area hos triangel

- 10.** I triangeln ABC är sidorna AC och BC lika långa.
Beräkna triangelns area.

(2/0)



Kalla mittpunkten på sträckan AB för Z . Då blir

$$\tan 54^\circ = \frac{|CZ|}{|ZB|}$$
$$|CZ| = \underbrace{2,25}_{|ZB|} \cdot \tan 54^\circ$$

där $|CZ|$ betecknar längden av sträckan CZ och motsvarande för ZB . Triangelns area är

$$A = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{4,5}_{\text{bas}} \cdot \underbrace{|CZ|}_{\text{höjd}} = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot \underbrace{2,25 \cdot \tan 54^\circ}_{|CZ|} = 7,0$$

Svar 7,0 cm².

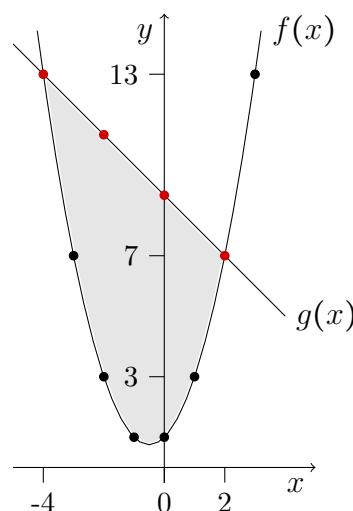
Del II # 11 (3/0) Area

11. Beräkna med hjälp av primitiv funktion arean av det område som begränsas av funktionerna $f(x) = x^2 + x + 1$ och $g(x) = 9 - x$

(3/0)

Gör en tabell och en enkel skiss över de två funktionerna.

x	$f(x)$	$g(x)$
3	13	
2	7	7
1	3	
0	1	9
-1	1	
-2	3	11
-3	7	
-4	13	13



Bestäm skärningspunkterna mellan $f(x)$ och $g(x)$ genom att lösa $f(x) = g(x)$

$$0 = \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{f(x)} - \underbrace{(9 - x)}_{g(x)} = x^2 + 2x - 8$$

Använd pq -formeln. Vi får

$$x_1 = -1 + \sqrt{1^2 - (-8)} = 2$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{1^2 - (-8)} = -4.$$

För att beräkna arean A lös integralen

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-4}^2 \left[\underbrace{g(x)}_{\text{övre}} - \underbrace{f(x)}_{\text{undre}} \right] dx \\
 &= \int_{-4}^2 \left[(9 - x) - (x^2 + x + 1) \right] dx \\
 &= \int_{-4}^2 \left[8 - 2x - x^2 \right] dx \\
 &= \left(8x - x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-4}^2 = 36 \\
 &= \left(16 - 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(-32 - 16 + \frac{64}{3} \right) = 36
 \end{aligned}$$

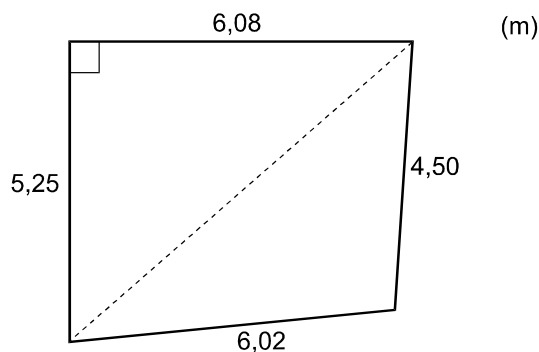
Svar 36 areaenheter

Del II # 12

(2/2)

Area hos fyrhörning

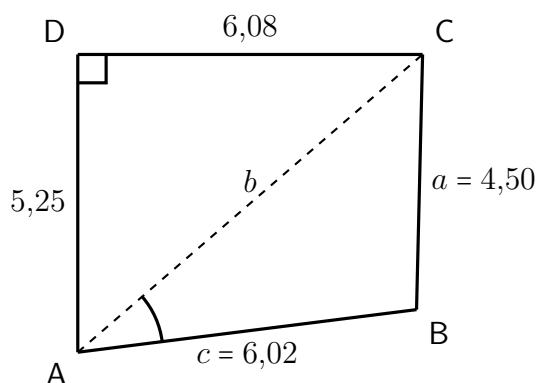
12. Daniel och Linda tittar på en lägenhet. Enligt uppgift är vardagsrummet $31,2 \text{ m}^2$. De vill kontrollera om detta stämmer och mäter väggarna och ritar en skiss över rummet. De vet att ett hörn i rummet är rätvinkligt. Så här ser deras skiss ut.



Vilken area har vardagsrummet enligt Daniels och Lindas skiss?

(2/2)

Inför beteckningar enligt figuren nedan.



Dela figuren i två trianglar ACD och ABC. Arean av rätvinkliga triangeln ACD är

$$T_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 5,25 \cdot 6,08 = 15,96.$$

Återstår att bestämma arean av ABC. Pythagoras sats tillämpad på triangeln ACD ger

$$b^2 = 5,25^2 + 6,08^2$$

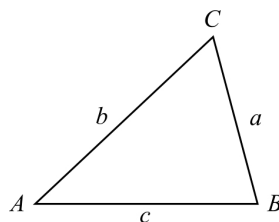
$$b = 8,03$$

Alla tre sidor i triangeln ABC är kända. Använd FORMELSAMLINGEN där finns följande formler:

Sinussatsen $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Areasatsen $T = \frac{ab \sin C}{2}$



Med *areasatsen* kan ytan av triangel beräknas när två sidor och mellanliggande vinkel är kända. Bestäm vinkeln A i triangeln ABC med hjälp av *cosinusteoremet*.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{8,03^2 + 6,02^2 - 4,50^2}{2 \cdot 8,03 \cdot 6,02} = 0,8325 \end{aligned}$$

Med trigonometriska ettan kan $\sin A$ beräknas,

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - 0,8325^2} = 0,5540. \\ T_{ABC} &= \frac{bc \sin A}{2} \\ &= \frac{8,03 \cdot 6,02 \cdot 0,5540}{2} = 13,40 \end{aligned}$$

Arean hos fyrhörningen ABCD är

$$A_{ABCD} = \underbrace{T_{ABD}}_{15,96} + \underbrace{T_{ABC}}_{13,40} = 29,36.$$

Svar Den sökta arean är $29,4 \text{ m}^2$.

Del II # 13 (2/1) Samtliga lösningar**13.** Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $\sin 3x = 0,421$

(2/1)

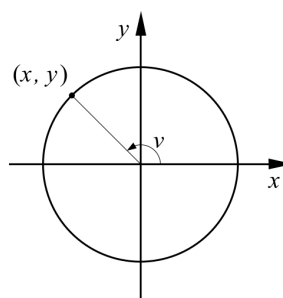
Använd FORMELSAMLINGEN

Enhetscirkeln

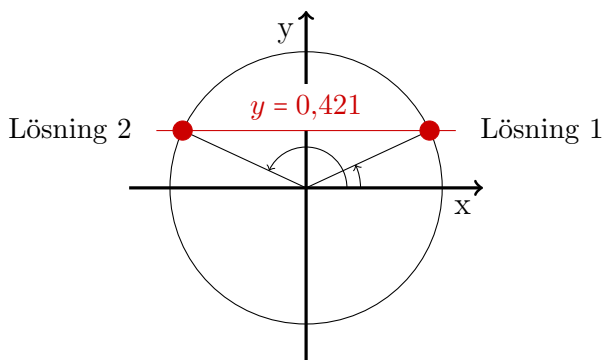
$$\sin v = y$$

$$\cos v = x$$

$$\tan v = \frac{y}{x}$$



Rita alltid enhetscirkel när du har sin, cos och tan utanför första kvadranten.



Lösning 1

$$\sin 3x_1 = 0,421$$

$$24,9^\circ = \sin^{-1} 0,421$$

$$3x_1 = 24,9^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x_1 = 8,3^\circ + n \cdot 120^\circ$$

Lösning 2

$$\sin 3x_2 = 0,421$$

$$3x_2 = 180^\circ - 24,9^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$x_2 = 51,7^\circ + n \cdot 120^\circ$$

Svar $x_1 = 8,3^\circ + n \cdot 120^\circ$ och $x_2 = 51,7^\circ + n \cdot 120^\circ$.

Del II # 14

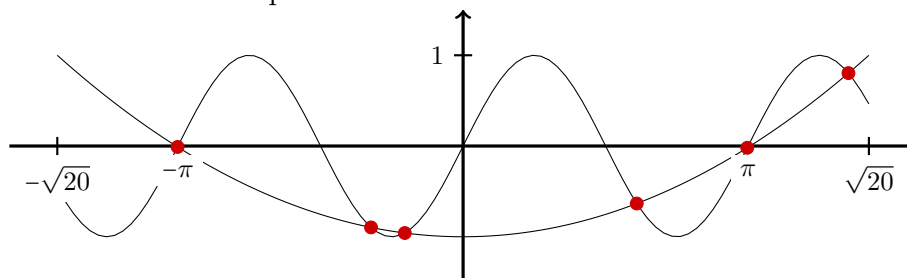
(1/1)

Antal lösningar

14. Bestäm antalet lösningar till ekvationen $\sin 2x = \frac{x^2}{10} - 1$,
där x mäts i radianer.

(1/1)

Konstatera att $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ för alla x och att $-1 \leq \frac{x^2}{10} - 1 \leq 1$ då $-\sqrt{20} \leq x \leq \sqrt{20}$. Gör en enkel skiss av de två funktionerna. Räkna antalet rötter (skärningspunkter). Det räcker med en enkel skiss och kunskap för att komma till rätt svar.



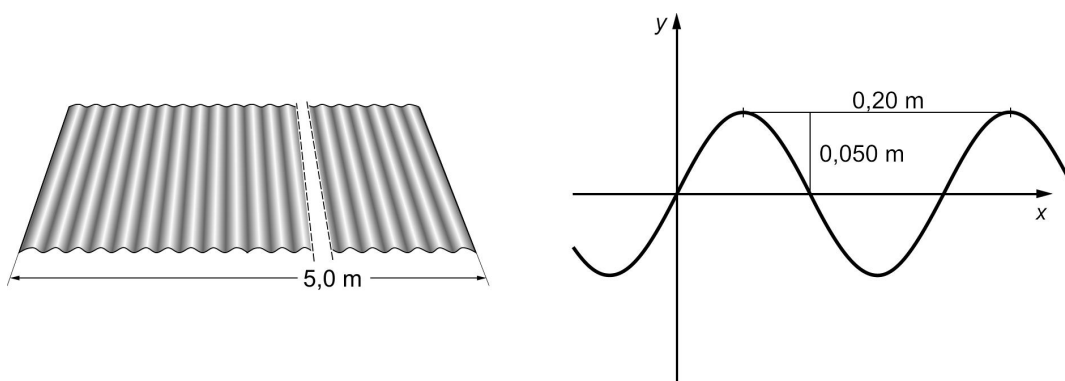
Svar Ekvationen har 6 lösningar.

Kommentar Enklast gör du skissen genom att använda grafritande miniräknare.

Kommentar Av grafen ser det ut som $\pm\pi$ är två lösningar till ekvationen. Så är det inte. För sinusfunktionen gäller att kurvan $y = \sin x$ skär x -axeln då $x = \pm\pi$ och funktionen $y = \frac{x}{10} - 1$ skär x -axeln då $x = \pm\sqrt{10}$. $\pi \approx 3,14$ och $\sqrt{10} \approx 3,16$.

Del II # 15 (0/4/∞) Korrugerad plåt

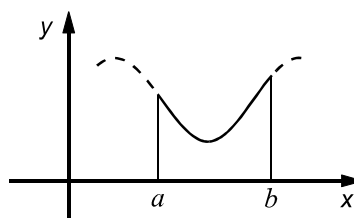
15. En korrugerad plåt tillverkas genom att en plan plåt veckas. Sedd från sidan har den korrugerade plåten på bilden formen av en sinuskurva med perioden 0,20 m och amplituden 0,050 m.



- a) Bestäm en formel för ”plåtkurvan” på formen $f(x) = A \sin kx$ (0/1)

Det finns en formel för beräkning av kurvlängd. Enligt denna gäller att längden s av en kurva $y = f(x)$ från $x = a$ till $x = b$ kan beräknas som:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



- b) Hur lång *plan* plåt ska man utgå ifrån för att den korrugerade plåtens längd ska bli 5,0 m? (0/3/∞)

Bestäm A och k i

$$f(x) = A \sin kx.$$

Givet är amplituden 0,05 m då blir

$$A = 0,05.$$

Perioden är 20 cm då blir

$$k = \frac{2\pi}{0,20} = 10\pi.$$

Det första steget i lösningen är att beräkna kurvans längd s över en period.

$$s = \int_0^{0,20} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

där

$$f'(x) = \underbrace{A}_{0,05} \underbrace{k}_{10\pi} \cos kx = \frac{\pi}{2} \cos(10\pi x).$$

Integralen blir

$$s = \int_0^{0,20} \sqrt{1 + \left[\frac{\pi}{2} \cos(10\pi x)\right]^2} \, dx$$

som är den längd *plan* plåt som krävs för att göra en korrugerad plåt med längden 0,20 meter. Hur löser vi integralen? I FORMELSAMLINGEN saknas primitiv funktion till integralen! Att skriva om $\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2} \cos 10\pi\right)^2}$ med hjälp av olika trigonometriska formler i FORMELSAMLINGEN är inte heller någon framkomlig väg. Denna integral kan inte knäckas (lösas) med matematiska metoder utan måste behandlas numeriskt.

Vi ska alltså beräkna

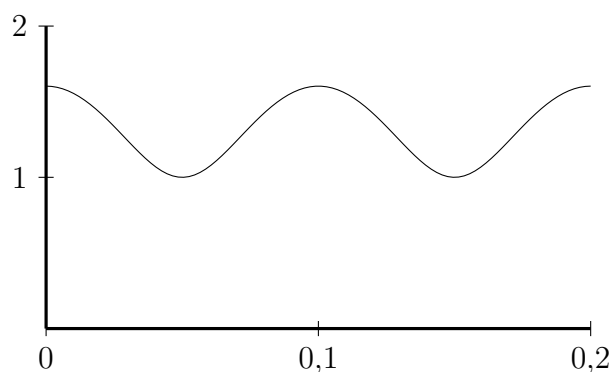
$$\int_0^{0,20} \underbrace{\sqrt{1 + \left[\frac{\pi}{2} \cos(10\pi x)\right]^2}}_{\text{integrand}} \, dx$$

med en numerisk metod. Detta går enkelt med en grafitande miniräknare. Detta är en procedur med tre steg.

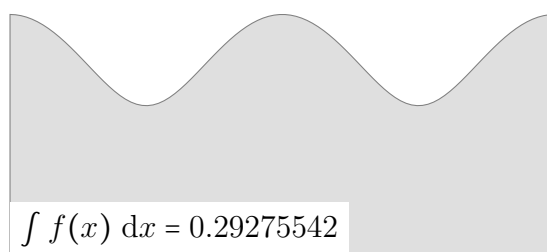
Steg 1. Mata in integranden. På Texas-räknare sker detta med knappen Y=.

$$\backslash Y_1 = \sqrt{(1 + (\pi * 0.5 * \cos(10 * \pi * x))^2)}$$

Steg 2. Rita funktionen. Använd knappen WINDOW för att välja lämpligt fönster. Lämpligt fönster är XMIN=0 XMAX=0,2 YMIN=0 och YMAX=2. På Texasräknare trycker du på knappen GRAPH. Du får följande kurva:



Steg 3. Använd knappen **CALC** för att integrera funktionen. Välj alternativet $\int f(x) dx$. Mata in gränserna 0 och 0,20.



För att göra 0,20 m korrugerad plåt åtgår 0,293 m plan plåt och för att göra 5 m korrugerad plåt åtgår $\frac{0,295 \cdot 5}{0,20} \approx 7,3$ m.

Svar a) Formen för plåtkurvan är $f(x) = 0,05 \sin\left(\frac{2\pi}{0,2}x\right)$

Svar b) För 5 m korrugerad plåt åtgår 7,3 m plan plåt.

Kommentar I den äldre kursen MaD ingick numeriska algoritmer för integrering. På sidan 28 presenteras en lösning anpassad till MaD.

Del II # 16 (1/2/⊗) Lokalt maximum

16. För vilka värden på konstanterna a och b gäller det att funktionen

$$f(x) = ax^2 + bx - \sin 3x \text{ har ett lokalt maximum för } x = 0?$$

(1/2/⊗)

Ett krav för att funktionen $f(x)$ ska ha ett extremvärde för $x = 0$ är att $f'(0) = 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx - \sin 3x$$

$$f'(x) = 2ax + b - 3 \cos 3x$$

Med $x = 0$ får vi

$$f'(0) = \underbrace{b}_{b=3} - 3 \underbrace{\cos 0}_1 = 0.$$

Då $b = 3$ är punkten $(0, f(0)) = (0, 0)$ antingen max-, min- eller terrasspunkt. För $b \neq 3$ är punkten $(0, f(0))$ inte maximum, (minimum eller terrasspunkt). Den funktion vi ska undersöka är

$$f(x) = ax^2 + 3x - \sin 3x$$

med derivata och andraderivata

$$f'(x) = 2ax + 3(1 - \cos 3x)$$

$$f''(x) = 2a + 9 \sin 3x$$

Följande gäller

$$\begin{aligned} f''(0) &= 2a > 0 && \text{min} \\ f''(0) &= 2a < 0 && \text{max} \\ f''(0) &= 2a = 0 && ?? \end{aligned}$$

Vad gäller för fallet $a = 0$ och $b = 3$? Studera tecken för derivatan $f'(x)$ kring $x = 0$!

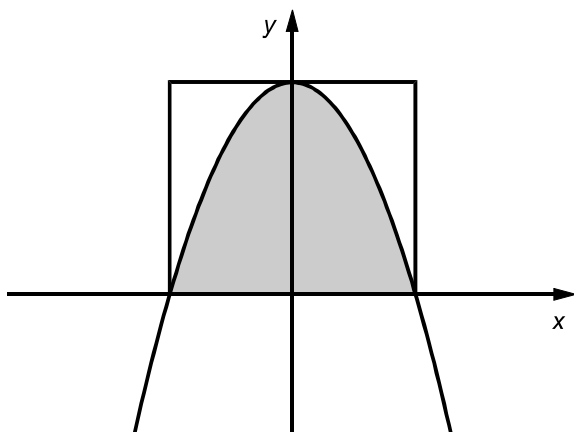
$$f'(x) = 3 \underbrace{(1 - \cos 3x)}_{>0 \text{ då } x \neq 0}.$$

Funktionen $f(x)$ är alltså växande kring $x = 0$ och därmed är punkten en terrasspunkt.

Svar Funktionen har maximum för $a < 0$ och $b = 3$.

Del II # 17 (3/4/⊗) En parabel och en rektangel

17. Figuren visar en parabel och en rektangel i ett koordinatsystem. Det skuggade området är begränsat av parabeln och x -axeln. Areal av det skuggade området kallas i fortsättningen parabelarean.



Två av rektangelns hörn sammanfaller med kurvans skärningspunkter med x -axeln.
En av rektangelsidorna tangerar kurvans maximipunkt.

I den här uppgiften ska du undersöka förhållandet mellan parabelarean och rektangelarean.

Låt parabelns ekvation vara $y = b - ax^2$, där a och b är positiva tal.

- Du kan då börja t.ex. med att sätta $b = 9$ och $a = 1$ och rita grafen till funktionen $y = 9 - x^2$. Bestäm därefter förhållandet mellan parabelarean och rektangelarean.
- Välj själv andra exempel och försök formulera en slutsats utifrån dina valda exempel.
- Undersök om din slutsats även gäller i det allmänna fallet med parabeln $y = b - ax^2$

Om du vill kan du istället undersöka det allmänna fallet direkt.

(3/4/⊗)

Parabelns ekvation är

$$y = b - ax^2$$

Parabeln har maxvärde $y(0) = b$ som också är rektangelns höjd. Nästa steg är att bestämma rektangelns bredd. Lös ekvationen $y(x) = 0$

$$0 = b - a x^2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Rektangelns bredd blir $2\sqrt{\frac{b}{a}}$. Rektangelns yta A_R blir

$$A_R = b \cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Parabelns yta A_P beräknas med den bestämda integralen

$$A_P = \int_{-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{+\sqrt{\frac{b}{a}}} (b - a x^2) dx.$$

Genom att utnyttja symmetrin i problemet kan integralen skrivas som

$$A_P = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} (b - a x^2) dx$$

där en gräns är 0 vilket gör räkningen lite enklare.

$$A_P = 2 \cdot \left[b x - \frac{a x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} = 2 \cdot \left[b \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{a}{3} \frac{b}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} \right]$$

$$A_P = 2 \cdot \left[b - \frac{b}{3} \right] \sqrt{\frac{b}{a}} = \underbrace{2 b \sqrt{\frac{b}{a}}}_{A_R} \cdot \frac{2}{3}$$

Svar $A_P = \frac{2}{3} A_R$

Kommentar Att numeriskt undersöka förhållandet mellan ytorna för olika värden på parabelns parametrar a och b är jobbigt. Risk finns att drabbas av "sifferdöden". Ofta är det enklare att räkna med variabler/bokstäver och lösa det generella problemet direkt.

Appendix, D-kursproblem

I den äldre kursen Ma D ingick numeriska algoritmer (och differentialekvationer av andra ordningen). Lösningarna till numeriska problem behandlades med metoder från numerisk analys.

Del II # 15 (0/4/⊗) Korrugerad plåt

Givet är amplituden 0,05 m då blir

$$A = 0,05.$$

Perioden är 20 cm då blir

$$k = \frac{2\pi}{0,20} = 10\pi.$$

Det första steget i lösningen är att beräkna kurvans längd s över en period.

$$s = \int_0^{0,20} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

där

$$f'(x) = \underbrace{A}_{0,05} \underbrace{k}_{10\pi} \cos kx = \frac{\pi}{2} \cos(10\pi x).$$

Integralen blir

$$s = \int_0^{0,20} \sqrt{1 + \left[\frac{\pi}{2} \cos(10\pi x)\right]^2} dx$$

som är den längd *plan* plåt som krävs för att göra en korrugerad plåt med längden 0,20 meter. Hur löser vi integralen? I FORMELSAMLINGEN saknas primitiv funktion till integralen! Att skriva om $\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2} \cos 10\pi\right)^2}$ med hjälp av olika trigonometriska formler i FORMELSAMLINGEN är inte heller någon framkomlig väg. Denna integral kan inte knäckas (lösas) med matematiska metoder utan måste behandlas numeriskt. För detta väljer vi trapetsmetoden som finns i FORMELSAMLINGEN till kursen MaD.

Integraler

Intervall $a_0 \leq x \leq a_n$ delas in i n delintervall.

Mittpunkten i varje delintervall betecknas $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\text{Rektangelmetoden: } \int_{a_0}^{a_n} f(x) dx = \frac{a_n - a_0}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$$

$$\text{Trapetsmetoden: } \int_{a_0}^{a_n} f(x) dx = \frac{a_n - a_0}{2n} (f(a_0) + 2f(a_1) + 2f(a_2) + \dots + 2f(a_{n-1}) + f(a_n))$$

Innan vi integrerar numeriskt noterar vi att

$$\int_0^{0,20} (\text{integrand}) dx = 4 \cdot \int_0^{0,05} (\text{integrand}) dx$$

på grund av problemets symmetri. Vi beräknar alltså

$$\int_0^{0,05} \sqrt{1 + \left[\frac{\pi}{2} \cos(10\pi x)\right]^2} dx$$

med trapetsmetoden som är den längd *plan* plåt som går åt för att göra 5 cm korrugerad plåt.

x cm	$10\pi x$	$\cos(10\pi x)$	$\frac{\pi}{2} \cos(10\pi x)$	$\sqrt{1 + \left[\frac{\pi}{2} \cos(10\pi x)\right]^2}$	Trapetsmetod		
					n=1	n=2	n=4
$\frac{0}{4}$	0,0000	$\frac{0}{1}$	1,00000	1,57080	1,8621	1,8621	1,8621
$\frac{1}{4}$	0,0125	$\frac{\pi}{8}$	0,92388	1,45123			3,5248
$\frac{2}{4}$	0,0250	$\frac{\pi}{4}$	0,70711	1,11072		2,9891	2,9891
$\frac{3}{4}$	0,0375	$\frac{3\pi}{8}$	0,38268	0,60112			2,3335
$\frac{4}{4}$	0,0500	$\frac{\pi}{2}$	0,00000	0,00000	1,0000	1,0000	1,0000
Σ					2,8621	5,8512	11,7096
kurvlängd för 5 cm korrugerad plåt = $\frac{0,05}{2n} \Sigma$					0,07155	0,07314	0,07318

För att göra 0,05 m korrugerad plåt åtgår 0,073 m plan plåt.

Svar För 5 m korrugerad plåt åtgår 7,3 m plan plåt.

Kommentar Figuren nedan visar integranden, $\sqrt{1 + \left[\frac{\pi}{2} \cos(10\pi x)\right]^2}$, och approximationen med trapetsregel för fallen $n = 1, 2$ och 4 . För ett problem som detta är det rimligt att använda $n = 2$ eller bättre $n = 4$, $n = 1$ ska du inte använda.

