Innehåll

Förord

Kom ihåg
- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan
- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS D VÅREN 2002

Anvisningar

Provtid

240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I.

Hjälpmedel

Del I: ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”.
Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.

Del II: Miniräknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”.

Provmaterialet

Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar.

Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in.

Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

Provet

Provet består av totalt 15 uppgifter. **Del I** består av 7 uppgifter och **Del II** av 8 uppgifter.

Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel.

Uppgift 15 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete.

Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.

Poäng och betygsgränser

Provet ger maximalt 43 poäng.

Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med ¤, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna i betygskriterier 2000.

Undre gräns för provbetyget
Godkänd: 12 poäng.
Väl godkänd: 24 poäng varav minst 6 vg-poäng.
Mycket väl godkänd: Kraven för Väl godkänd ska vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser ¤-uppgifterna.

Namn: ______________________________ Skola: ______________________________

Komvux/gymnasieprogram: ____

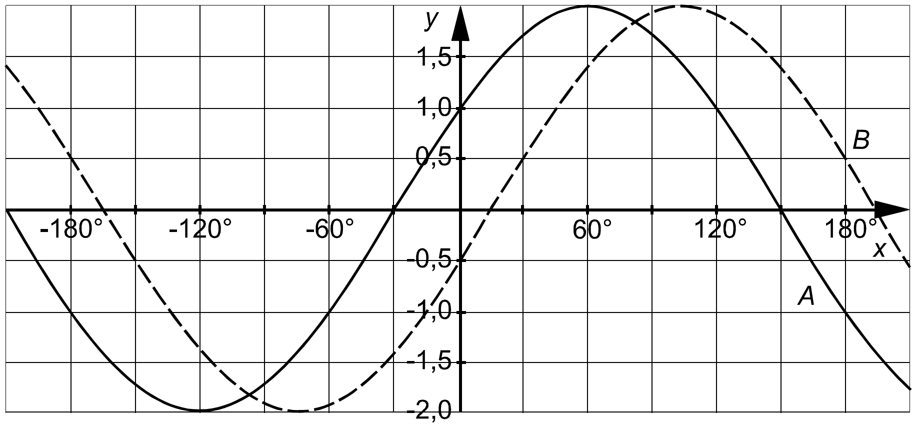
Del I

Denna del består av 7 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Beräkna $\int_0^3 (x^2 + 4x)\mathrm{d}x$ (2/0)

2. Beräkna $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ då $f(x) = 2\sin x$ (2/0)

3.



Kurva *A* beskrivs av ekvationen $y = 2\sin(x + 30°)$
Ange en ekvation för kurva *B*. *Endast svar fordras* (2/0)

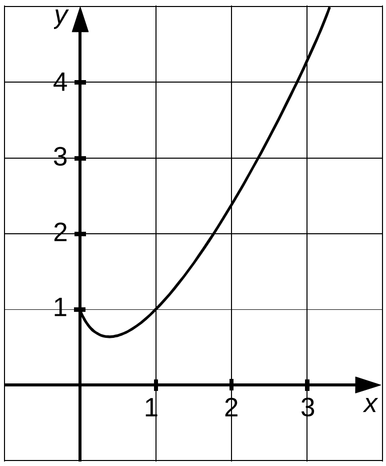
4. Vilken eller vilka av nedanstående ekvationer har två lösningar i intervallet $0 \leq x \leq \pi$

A: $\cos x = -0{,}3$
B: $\sin x = 0{,}8$ *Endast svar fordras* (1/0)

5. Bestäm $g(x)$ om $g'(x) = \sin 3x + \cos 2x$ och $g(\pi) = 2$ (3/0)

6. Bestäm det positiva talet a så att $\int_1^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2$ (2/0)

7.



Ovanstående diagram visar grafen till en funktion $f(x)$ vars derivata är $1 + \ln x$

Beräkna med hjälp av diagrammet $\int_1^3 (1 + \ln x)\,\mathrm{d}x$ (0/2)

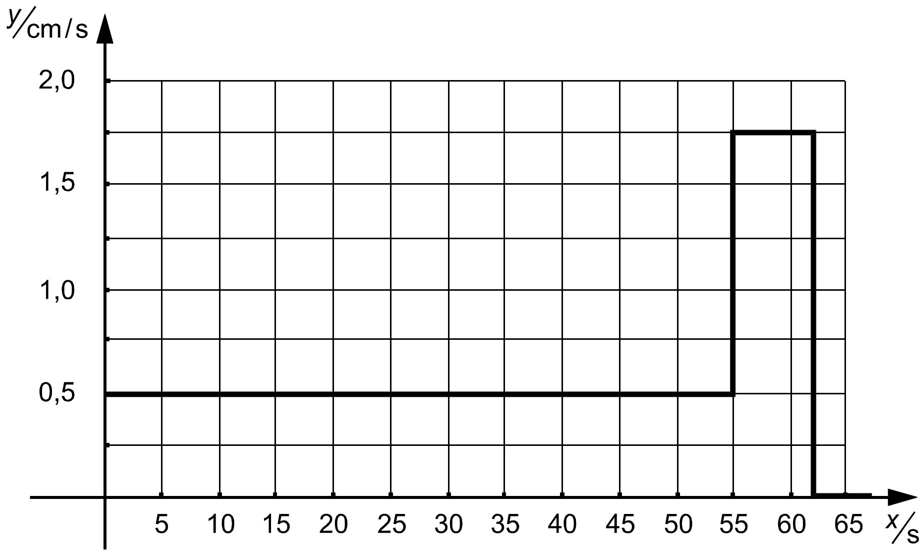
DEL II

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

8. Visa att $y = 10\mathrm{e}^{2x}$ är en lösning till differentialekvationen $y' - 2y = 0$ (2/0)

9. En triangel har sidorna 5,0 cm, 6,0 cm och 7,0 cm.
Beräkna triangelns största vinkel. (2/0)

10. Vatten rinner med jämn hastighet ner i en från början tom behållare. Nedanstående figur visar med vilken hastighet, y cm/s, vattennivån stiger i behållaren.



a) Hur lång tid tar det innan vattnet slutar rinna? (1/0)

b) Hur högt når vattennivån? (2/0)

c) Rita en skiss som visar hur behållaren kan se ut. (0/1)

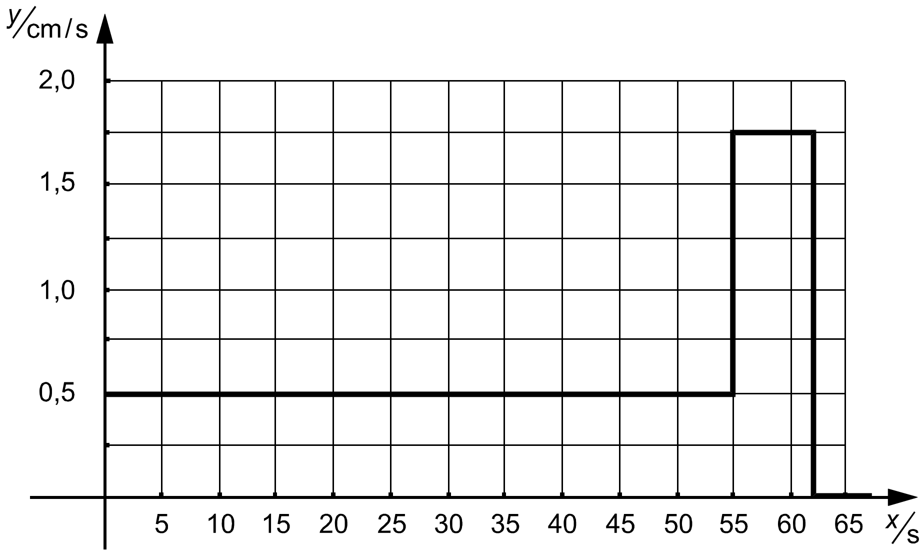
DEL II

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

8. Visa att $y = 10\,\mathrm{e}^{2x}$ är en lösning till differentialekvationen $y' - 2y = 0$ (2/0)

9. En triangel har sidorna 5,0 cm, 6,0 cm och 7,0 cm.
Beräkna triangelns största vinkel. (2/0)

10. Vatten rinner med jämn hastighet ner i en från början tom behållare.
Nedanstående figur visar med vilken hastighet, y cm/s, vattennivån stiger i behållaren.

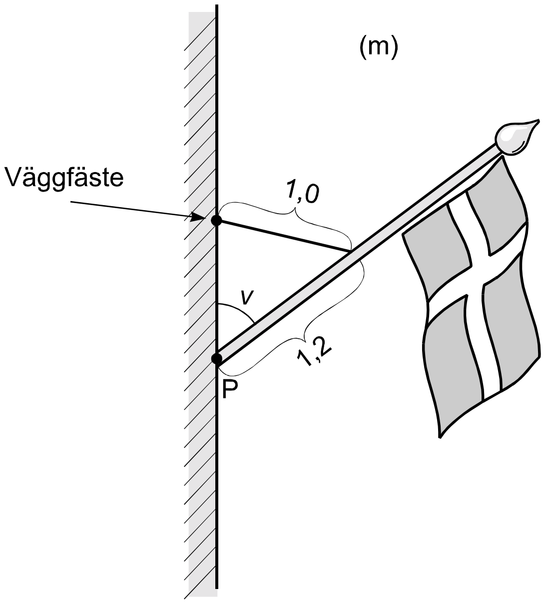


a) Hur lång tid tar det innan vattnet slutar rinna? (1/0)

b) Hur högt når vattennivån? (2/0)

c) Rita en skiss som visar hur behållaren kan se ut. (0/1)

11.



Över dörren till en butik sitter en flaggstång. Den hålls upp av ett stag med längden 1,0 m. Butiksägaren ska flytta stagets väggfäste så att flaggstången bildar vinkeln $v = 30°$ med väggen. Väggfästet placeras rakt ovanför punkten P. Bestäm avståndet mellan P och väggfästets nya läge. (2/1)

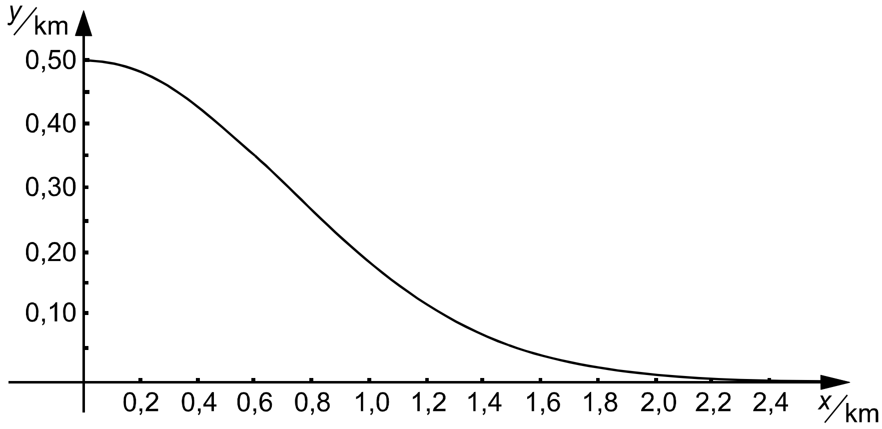
12. Kurvorna $y = \mathrm{e}^{0,2x}$ och $y = x^2$ innesluter tillsammans med y-axeln ett område i första kvadranten. Teckna integralen för områdets area samt bestäm denna area med minst tre värdesiffror. (0/3)

13. a) Visa att $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$ (0/1)

b) Beräkna det exakta värdet av integralen

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} 2\cos^2 2x \, \mathrm{d}x$$ (0/2)

14. En skidbacke har fallhöjden 500 meter. Banprofilen ser du i bilden nedan.



Höjden y km är en funktion av sträckan x km.
Sambandet mellan y och x ges av

$y = 0{,}5\mathrm{e}^{-x^2}$, $0 \le x \le 2{,}5$

a) Bestäm backens lutning för $x = 0{,}8$ (0/2)

Ett allmänt sätt att beskriva backar med liknande banprofil som ovan ges av funktionen

$y = 0{,}5\mathrm{e}^{-ax^2}$, $0 \le x \le 2{,}5$

där a är en positiv konstant.

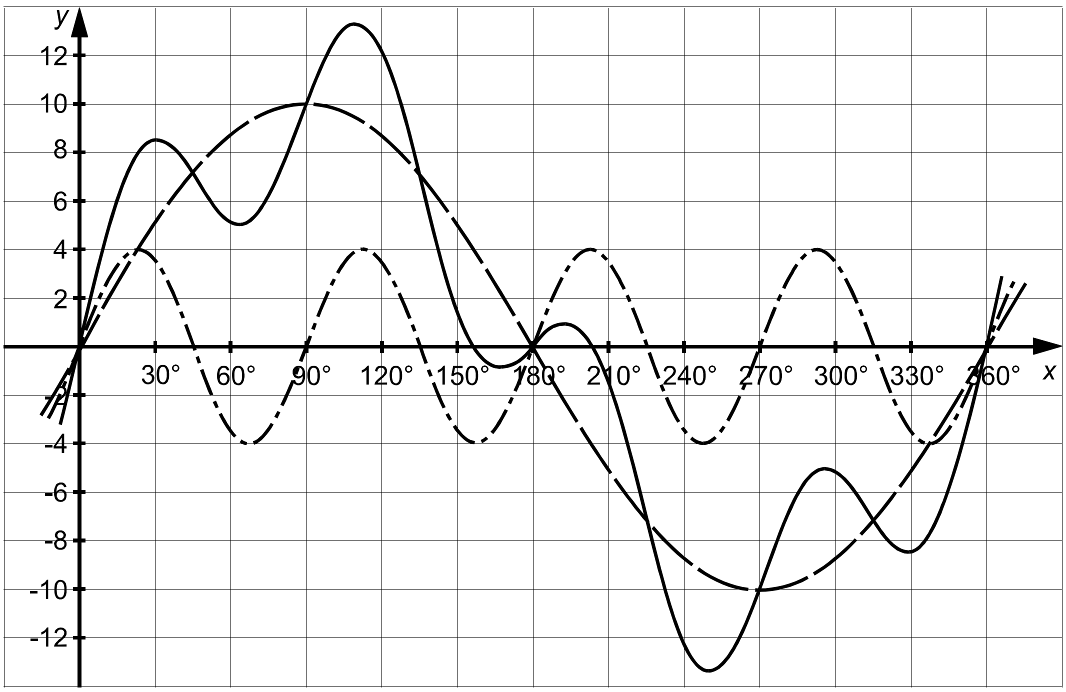
b) Ställ upp en ekvation för bestämning av x-värdet i den punkt där backar med en sådan banprofil är brantast. (0/3/¤)

c) Bestäm a så att backen är brantast för $x = 1{,}0$ (0/1)

15. En ton låter olika då den spelas på orgel eller fiol. Detta beror på att klangen är sammansatt av en grundton och flera så kallade övertoner. Övertonerna kan vara olika starka och det är detta som ger instrumentets klangfärg.
Övertonernas perioder förhåller sig på ett enkelt sätt till grundtonen. Om vi väljer en fiolsträng som exempel så kan den ge en ton som beskrivs med en summa av termer $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + ...$

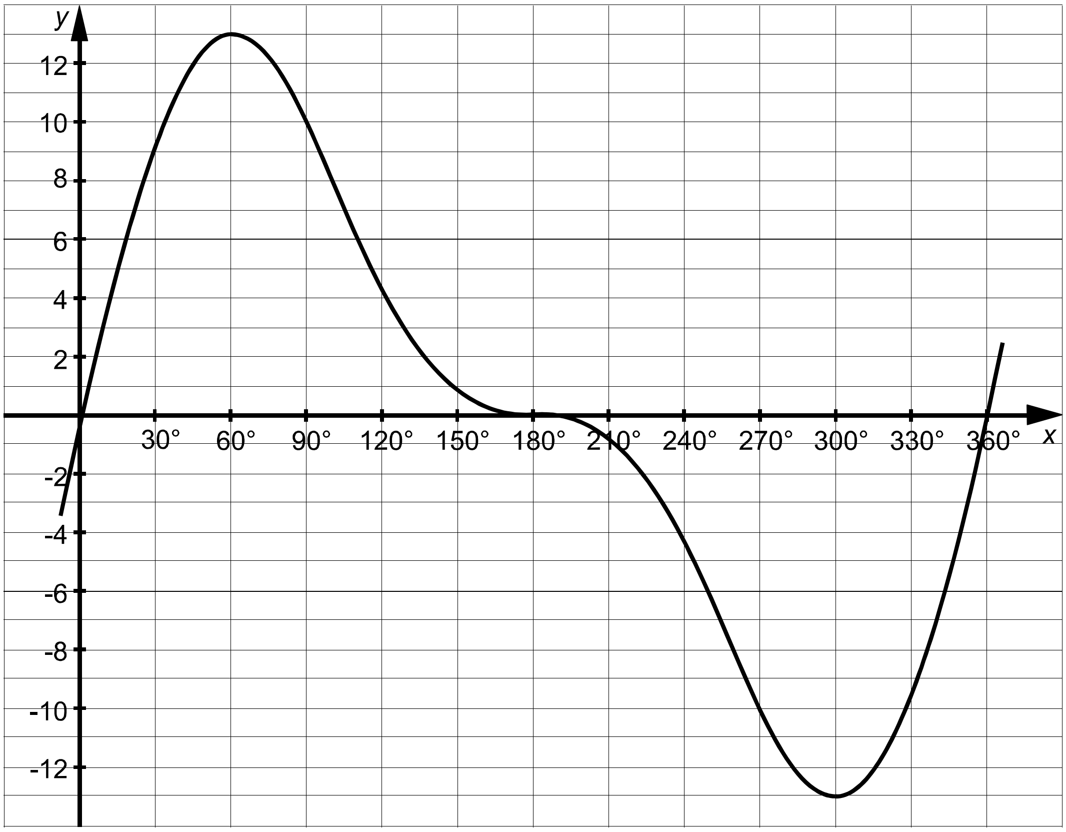
$a_1 \sin x$ motsvarar grundtonen och sedan följer 1:a övertonen, 2:a övertonen osv.

- Figur 1 visar graferna till de funktioner som beskriver en grundton $(y = a \sin x)$, dess tredje överton $(y = b \sin 4x)$ samt den ton som fås av dessa tillsammans $(y = a \sin x + b \sin 4x)$.
  Bestäm konstanterna *a* och *b*.



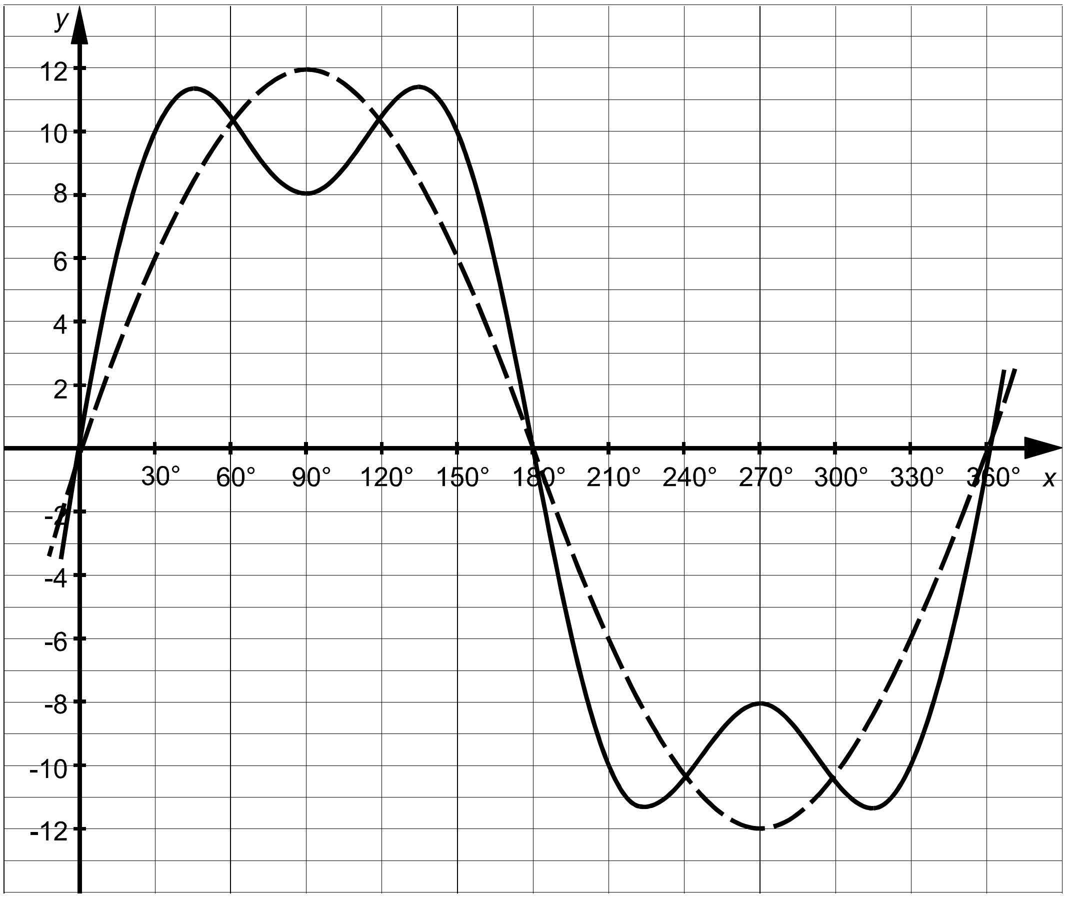
Figur 1

- Figur 2 visar grafen till funktionen $y = 10\sin x + c\sin 2x$
  Funktionen beskriver en ton som består av en grundton och dess första överton.
  Bestäm konstanten c.



Figur 2

- Figur 3 visar graferna till de funktioner som beskriver en grundton $y = 12\sin x$, samt den ton $y = 12\sin x + d\sin kx$ som fås av grundtonen tillsammans med en överton.
  Bestäm konstanterna *d* och *k*.



Figur 3

- Antag att du har en figur som visar graferna till funktionerna $y = p\sin x$ och $y = p\sin x + q\sin nx$, där *n* är ett heltal större än två.
  Beskriv en generell metod för hur man kan bestämma konstanterna *p*, *q* och *n* med hjälp av graferna. (2/4/¤)