

Innehåll

Förord	2
Lösningar till D-kursprov vt 2001	3
Digitala verktyg är tillåtna hela provet	3
Uppgift # 1 (2/0) Enkel integral	3
Uppgift # 2 (2/0) Alla primitiva funktioner	4
Uppgift # 3 (2/0) Bestäm sinus	5
Uppgift # 4 (3/0) Bestäm och beräkna derivata	7
Uppgift # 5 (2/0) Enkelt problem med sinussatsen	8
Uppgift # 6 (2/0) Enkel integral	9
Uppgift # 7 (2/0) Integral och area	10
Uppgift # 8 (2/0) Förenkla trigonometriskt uttryck	11
Uppgift # 9 (2/0) Triangelns area	12
Uppgift # 10 (0/2) Derivering med produktregeln	13
Uppgift # 11 (0/2) Primitiv funktion och linjära ekvationer	14
Uppgift # 12 (2/3) Parametrar i fasförskjuten sinuskurva	15
Uppgift # 13 (0/4) Parabolantenn och sinussatsen	17
Uppgift # 14 (0/3) Triangel och sinussatsen	19
Uppgift # 15 (2/4) Vattentank, modellbyggnad	20

Förord

Utformningen av de nationella proven i matematik har varierat över tid. Uppgifter till den äldre kursen Matematik D duger utmärkt för träning till kurser enligt Gy 2011. Skolverket har endast publicerat ett kursprov till kursen Ma4. Innehållet i den äldre kursen MaD hör nu främst till Ma4 men också till Ma3. I tabellen nedan framgår vilka uppgifter som är lämpliga till respektive kurs.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ma 3	1	2													
Ma 4	(1)	(2)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Kom ihåg

- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan

- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Uppgift # 1 (2/0) Enkel integral

1. Beräkna med hjälp av primitiv funktion $\int_0^2 (x^2 + 3) dx$ (2/0)

$$\int_0^2 (x^2 + 3) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 3x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} + 6 = \frac{8}{3} + \frac{18}{3} = \frac{26}{3} \approx 8,67$$

Svar $\frac{26}{3}$

Uppgift # 2 (2/0) Alla primitiva funktioner

2. Ange alla primitiva funktioner F till $f(x) = 2x + 5$ Endast svar fordras (2/0)

I FORMELSAMLINGEN finns funktioner med primitiva funktioner.

Primitiva funktioner	Funktion	Primitiva funktioner
	k	$kx + C$
	$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$f(x) = 2x + 5$$

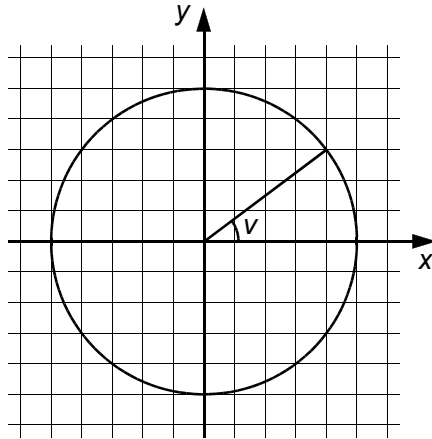
$$F(x) = 2 \frac{x^2}{2} + 5x + C$$

Svar $F(x) = x^2 + 5x + C$

Kommentar Konstanten C måste vara med. Uppgiften är att ange *alla* primitiva funktioner.

Uppgift # 3 (2/0) Bestäm sinus

3. Figuren visar en enhetscirkel.



- | | | | |
|----|------------------------------|----------------------------|-------|
| a) | Bestäm $\sin v$ | <i>Endast svar fordras</i> | (1/0) |
| b) | Bestäm $\sin(180^\circ - v)$ | <i>Endast svar fordras</i> | (1/0) |

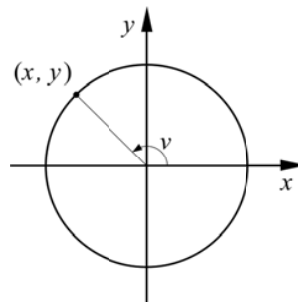
Använd FORMELSAMLINGEN där finns definitionen av sinus.

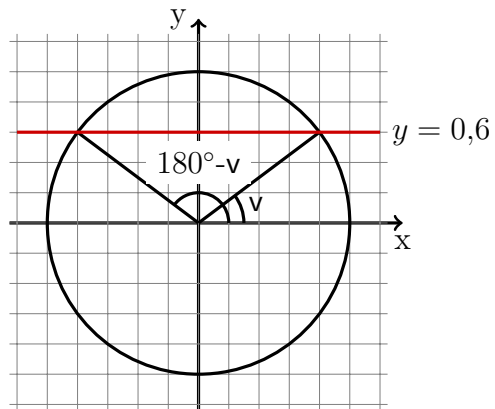
Enhetscirkeln

$$\underline{\sin v = y}$$

$$\cos v = x$$

$$\tan v = \frac{y}{x}$$





Cirkeln har radien=1. Varje ruta är 0,2 bred och hög.

Svar a) $\sin v = 0,6$

Svar b) $\sin(180^\circ - v) = 0,6$

Uppgift # 4 (3/0) Bestäm och beräkna derivata**4.** Låt $f(x) = \sin 3x$ a) Bestäm $f'(x)$ *Endast svar fordras* (1/0)b) Beräkna $f'(0)$ *Endast svar fordras* (1/0)c) Ange samtliga lösningar till ekvationen $f'(x) = 0$ (2/0)

Uppgifterna är ett exempel på en sammansatt funktion. Använd kedjeregeln som finns på sidan 3 i FORMELSAMLINGEN.

Kedjeregeln

Om $y = f(z)$ och $z = g(x)$ är två deriverbara funktioner så gäller för $y = f(g(x))$ att

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ eller } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

a) Derivera

$$f(x) = \sin 3x.$$

Den yttre funktionen är $f = \sin(\quad)$ med derivatan $f' = \cos(\quad)$. Den inre funktionen är $g = 3x$ med derivatan $g' = 3$. Vi får:

$$f'(x) = \cos(3x) \cdot 3$$

Svar a) $f'(x) = 3 \cos 3x.$ b) Beräkna $f'(0)$

$$f'(0) = \overbrace{\cos(3x)}^{\cos 0=1} \cdot 3 = 3$$

Svar b) $f'(0) = 3$ c) Ange samtliga lösningar till $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3 \cdot \cos(3x)$$

$$0 = \cos(3x)$$

$$3x = \pm 90^\circ + n \cdot 360^\circ$$

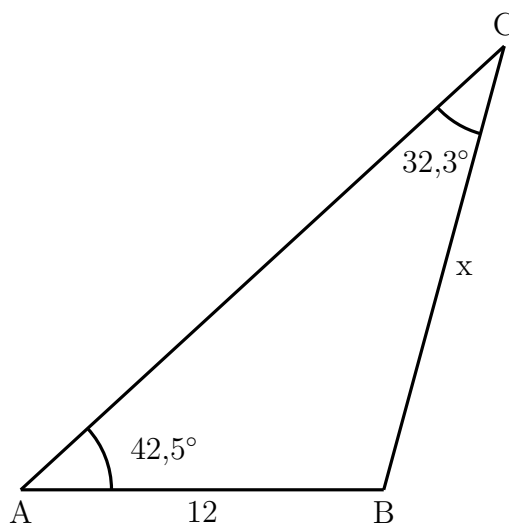
$$x = \pm 30^\circ + n \cdot 120^\circ$$

Svar c) $x = \pm 30^\circ + n \cdot 120^\circ$

Uppgift # 5 (2/0) Enkelt problem med sinussatsen

5. I triangeln ABC är sidan AB 12,0 cm, vinkeln A $42,5^\circ$ och vinkeln C $32,3^\circ$. Beräkna längden av sidan BC.

(2/0)



Vinkeln C (känd $32,3^\circ$) står mitt emot sträckan AB (känd 12cm) och vinkeln A (känd $42,5^\circ$) står mitt emot sträckan BC (sökta). Sinussatsen ger

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB}$$

$$\frac{\sin 42,5^\circ}{x} = \frac{\sin 32,3^\circ}{12}$$

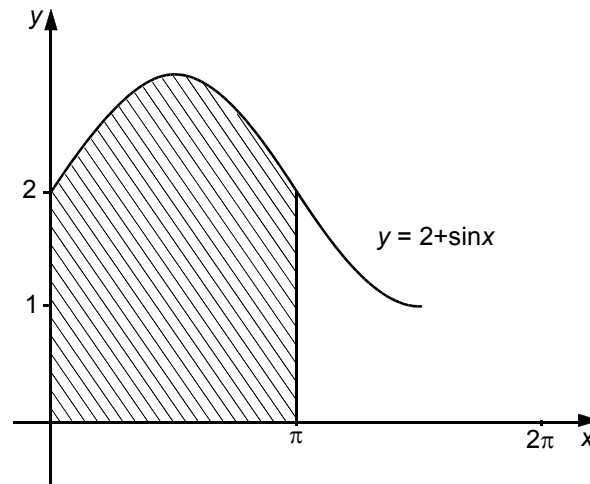
$$x = 12 \frac{\sin 42,5^\circ}{\sin 32,3^\circ} \approx 15,2.$$

Svar Sidan BC är 15,2 cm.

Uppgift # 6 (2/0) Enkel integral

6. Beräkna exakt arean av det skuggade området i figuren.

(2/0)



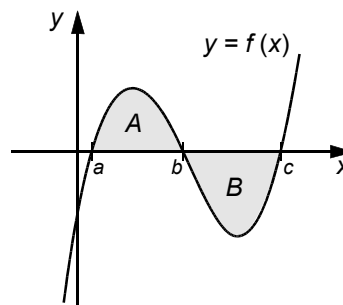
Integralen blir

$$\int_0^{\pi} (2 + \sin x) \, dx = [2x - \cos x]_0^{\pi} = [2 \cdot \pi - \underbrace{\cos \pi}_{-1}] - [2 \cdot 0 - \underbrace{\cos 0}_1] = 2\pi + 2$$

Svar $2\pi + 2$ areaenheter.

Uppgift # 7 (2/0) Integral och area

7. Grafen till funktionen $y = f(x)$ begränsar tillsammans med x -axeln två områden med areorna A och B areaenheter. Grafen skär x -axeln i a , b och c .



Teckna med hjälp av integral ett uttryck för

- | | | | |
|----|---------|---------------------|-------|
| a) | A | Endast svar fordras | (1/0) |
| b) | $B - A$ | Endast svar fordras | (0/1) |

- a) I intervallet från a till b är $f(x)$ övre funktion och linjen $y = 0$ undre funktion (x -axeln).

$$A = \int_a^b [f(x) - 0] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

Svar a) $\int_a^b f(x) \, dx$

- b) I intervallet från b till c är $f(x)$ undre funktion och linjen $y = 0$ övre funktion (x -axeln).

$$B = \int_b^c [0 - f(x)] \, dx = - \int_b^c f(x) \, dx$$

$$B - A = - \int_b^c f(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx$$

Svar b) $- \int_b^c f(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx$

Kommentar Alternativt kan integrationsordningen kastas om vilket ger

$$\int_c^b f(x) \, dx + \int_b^a f(x) \, dx$$

Uppgift # 8 (2/0) Förenkla trigonometriskt uttryck

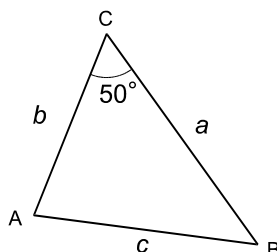
8. Förenkla så långt som möjligt $(\cos x + \sin x)^2 - \sin 2x$ (2/0)

$$\begin{array}{c}
 \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{trigonometriska ettan}} - \sin 2x \\
 \cos^2 x + \sin^2 x + \underbrace{2 \cos x \sin x - \sin 2x}_{\text{noll}}
 \end{array}$$

Svar Det förenklade uttrycket blir 1.

Uppgift # 9 (2/0) Triangelns area

9. I triangeln ABC är vinkeln C 50° .



Välj a och b så att triangelns area A ges av $A = 12 \sin 50^\circ \text{ cm}^2$

(0/2)

Använd areasatsen som finns i FORMELSAMLINGEN.

Sinussatsen

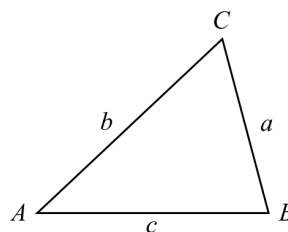
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Cosinussatsen

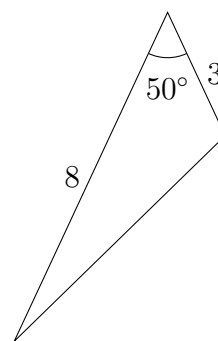
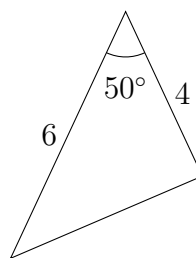
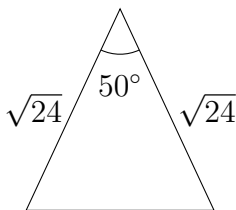
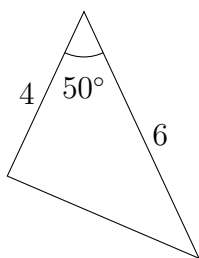
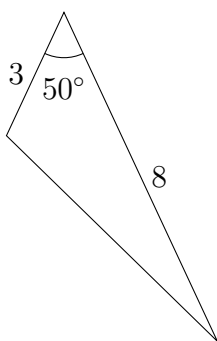
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Areasatsen

$$T = \frac{ab \sin C}{2}$$



Enligt areasatsen gäller att arean $T = \frac{ab \sin 50^\circ}{2}$ och enligt uppgiften är arean $12 \sin 50^\circ$ vilket ger $ab = 24$. Det finns oändligt många val av paret a och b .



Svar Några möjliga val är $a = 3$, $b = 8$ eller $a = 4$, $b = 6$ eller $a = \sqrt{24}$, $b = \sqrt{24}$.

Uppgift # 10 (0/2) Derivering med produktregeln

10. Visa att $y = x^2 \sin x$ är en lösning till differentialekvationen $xy' - 2y = x^3 \cos x$ (0/2)

Givet

$$y = x^2 \sin x$$

visa att

$$\underbrace{xy' - 2y}_{\text{vänsterled}} = \underbrace{x^3 \cos x}_{\text{högerled}}.$$

Strategin är att utveckla vänsterledet (VL). Börja med att derivera y med hjälp av produktregeln.

$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

Utveckla vänsterledet

$$\text{VL} = x(2x \sin x + x^2 \cos x) - 2x^2 \sin x$$

$$\text{VL} = 2x^2 \sin x + x^3 \cos x - 2x^2 \sin x$$

$$\text{VL} = x^3 \cos x.$$

Vänsterled och högerled är alltså lika vilket skulle visas.

Svar Se ovan.

Kommentar Lösningen $y = x^2 \sin x$ är inte entydig. Det finns fler lösningar till $xy' - 2y = x^3 \cos x$ men det hör inte till denna uppgift.

Uppgift # 11 (0/2) Primitiv funktion och linjära ekvationer

11. Funktionen $y = f(x)$ har en primitiv funktion $F(x) = Ax^2 + Bx$ där A och B är konstanter.

Bestäm A och B då $\int_0^1 f(x)dx = 2$ och $\int_0^2 f(x)dx = 0$ (0/3)

Bilda de två ekvationerna

$$2 = \int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = Ax^2 + Bx \Big|_0^1 = A + B$$

$$0 = \int_0^2 f(x) dx = F(x) \Big|_0^2 = Ax^2 + Bx \Big|_0^2 = A \cdot 2^2 + B \cdot 2.$$

Detta ekvationssystem med två obekanta har lösningen

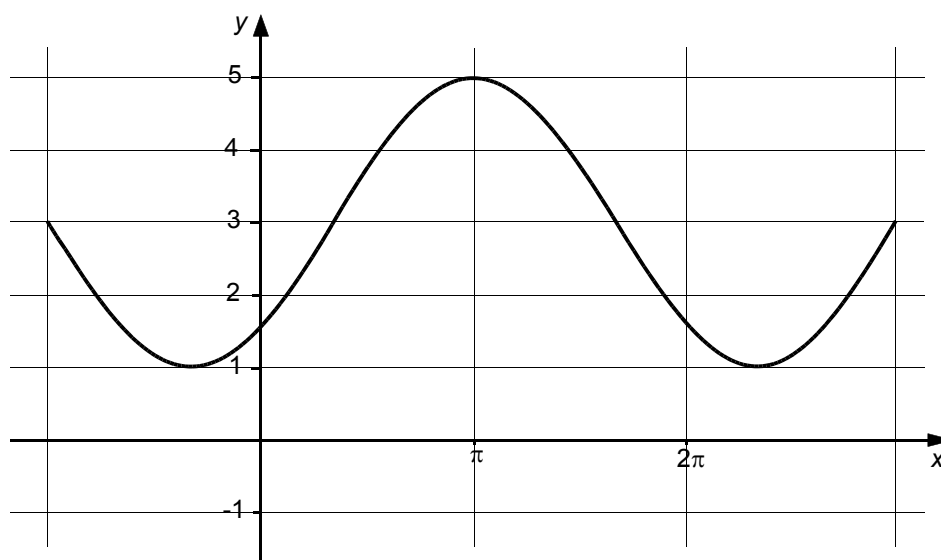
$$A = -2$$

$$B = 4$$

Svar $A = -2$ och $B = 4$.

Uppgift # 12 (2/3) Parametrar i fasförskjuten sinuskurva

12. På en sinuskurva $y = A \sin(Bx + C) + D$ har en av maximipunkterna koordinaterna $(\pi, 5)$. En av de två närliggande minimipunkterna har koordinaterna $(\frac{7\pi}{3}, 1)$, se figur.



- a) Bestäm A och D . Endast svar fordras (2/0)
- b) Bestäm B och C . (0/3)

Parametrarna A och D är enkelt att bestämma. Maxvärdet är 5 och minvärdet är 1.

Detta ger amplituden A

$$A = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

och nollpunktsförskjutningen D är

$$D = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Svar a) $A = 2$ och $D = 3$.

Nu återstår att bestämma vinkelhastighet B och fasförskjutning C i

$$y = 2 \sin(\underbrace{Bx + C}_{\text{argument}}) + 3$$

Skillnaden i argument mellan ett maxvärde och nästa maxvärde är 2π radianer.

Skillnaden i argument mellan ett maxvärde och efterföljande minvärde är π radianer.

Vi får nu

$$\pi = \overbrace{\left(B \frac{7\pi}{3} + C\right)}^{\text{argument för minvärde}} - \overbrace{(B\pi + C)}^{\text{argument för maxvärde}} = B\pi \left(\frac{7}{3} - 1\right) = B\pi \frac{4}{3}$$
$$B = \frac{3}{4}$$

Nu återstår att bestämma fasförskjutning C i

$$y = 2 \sin\left(\frac{3}{4}x + C\right) + 3$$

Använd koordinaten för maxpunkten $(\pi, 5)$. Sinusfunktionen har max när argumentet är $\frac{\pi}{2}$ vilket ger

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi + C$$
$$C = \frac{-\pi}{4}$$

Svar b) $B = \frac{3}{4}$ och $C = \frac{-\pi}{4}$

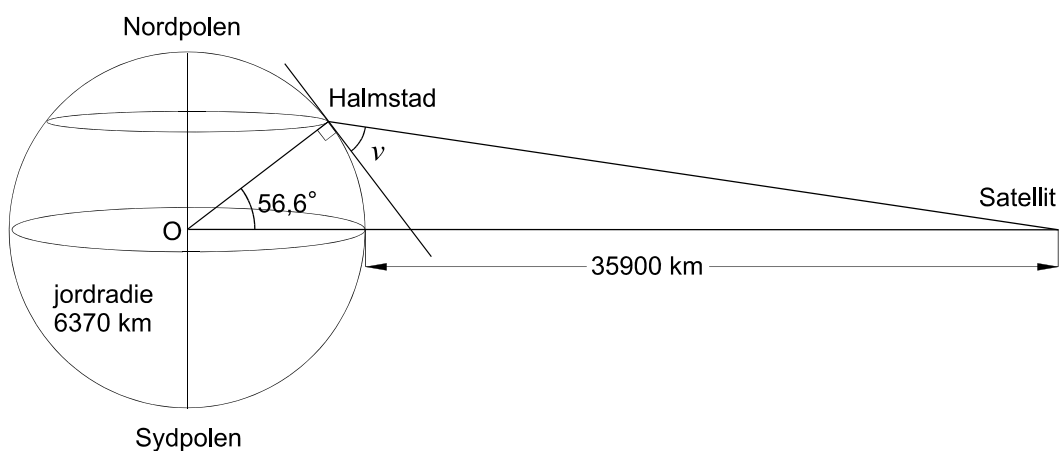
Uppgift # 13 (0/4) Parabolantenn och sinussatsen

13. Stina som bor i Halmstad har köpt en parabolantenn. Hon ska sätta upp den på villataket. Hur ska hon rikta parabolantennen för att bäst ta emot TV-signaler från en satellit? Kommunikationssatelliter finns "parkerade" i söder på en höjd av 35900 km rakt ovanför ekvatorn enligt figuren nedan. Halmstad ligger på latituden $56,6^\circ$ nordlig bredd och jorden kan antas vara en sfär med radien 6370 km.



Vilken vinkel v över horisonten i söder ska parabolantennen ställas in i för att bäst ta emot signalen?

(0/4)



I triangeln OHS är vinklarna

$$\angle O = 56,6^\circ$$

$$\angle H = 90^\circ + v$$

$$\angle S = 180^\circ - \angle H - \angle O = 180^\circ - 90^\circ - v - 56,6^\circ = 33,4^\circ - v$$

Inför beteckningar (för att underlätta)

$$r = 6\,370$$

$$R = 6\,370 + 35\,900$$

Sinussatsen ger

$$\frac{\sin(90^\circ + v)}{R} = \frac{\sin(33,4^\circ - v)}{r}$$

Trigonometrisk formel för $\sin(\alpha + \beta)$ ger

$$\sin(90^\circ + v) = \sin 90^\circ \cdot \cos v + \cos 90^\circ \cdot \sin v = \cos v$$

och trigonometrisk formel för $\sin(\alpha + \beta)$ ger

$$\sin(33,4^\circ - v) = \sin 33,4^\circ \cdot \cos v - \cos 33,4^\circ \cdot \sin v$$

Vi får

$$\begin{aligned}\frac{\cos v}{R} &= \frac{\sin 33,4^\circ \cdot \cos v - \cos 33,4^\circ \cdot \sin v}{r} \\ \frac{\cos 33,4^\circ}{r} \sin v &= \left(\frac{\sin 33,4^\circ}{r} - \frac{1}{R} \right) \cos v \\ \tan v &= \frac{r}{\cos 33,4^\circ} \left(\frac{\sin 33,4^\circ}{r} - \frac{1}{R} \right) \\ \tan v &= \tan 33,4^\circ - \frac{r}{R \cos 33,4^\circ} \\ v &= \tan^{-1} \left(\tan 33,4^\circ - \frac{r}{R \cos 33,4^\circ} \right) = 25,6^\circ\end{aligned}$$

Uppgift # 14 (0/3) Triangel och sinussatsen

- 14.** I triangeln ABC är vinkeln A dubbelt så stor som vinkeln B . Vilka längder kan sidan BC ha om sidan AC är 12 cm?

(0/3)

Inför variabler enligt

$$\angle A = 2\alpha$$

$$\angle B = \alpha$$

Kalla längden av den sökta sidan BC för x . Sinussatsen ger

$$\frac{\sin \alpha}{12} = \frac{\sin 2\alpha}{x}$$

$$x = 12 \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$$

Formeln för dubbla vinkeln $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ger

$$x = 12 \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 24 \cos \alpha$$

Vilka värden kan vinkeln α ha? Triangelns vinkelsumma är 180° . Det gäller att

$$180^\circ = \angle A + \angle B + \angle C$$

Ingen vinkel kan vara noll. Då gäller

$$180^\circ > \angle A + \angle B > 0^\circ$$

alttså att

$$180^\circ > 3\alpha > 0^\circ$$

$$60^\circ > \alpha > 0^\circ$$

Vi får nu att

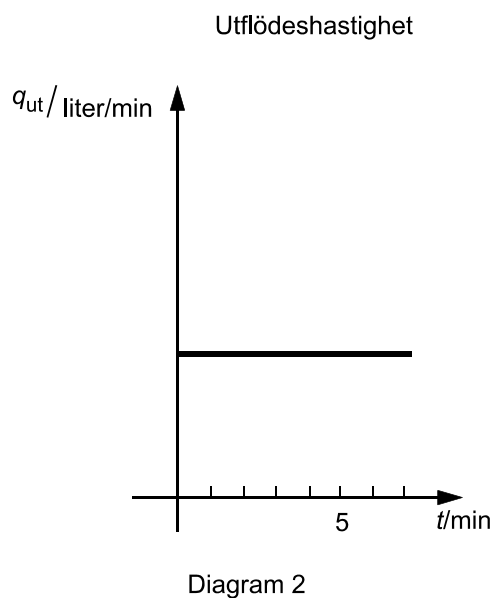
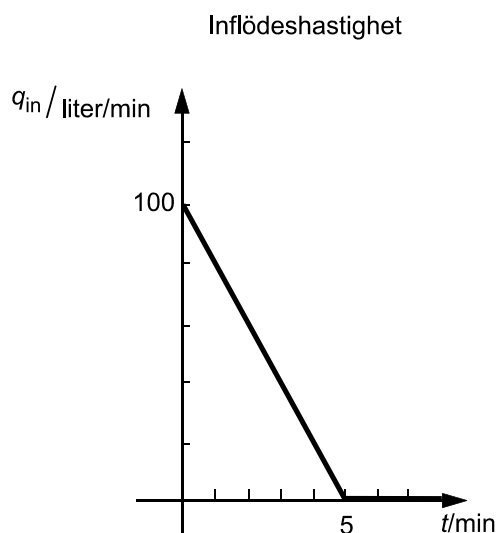
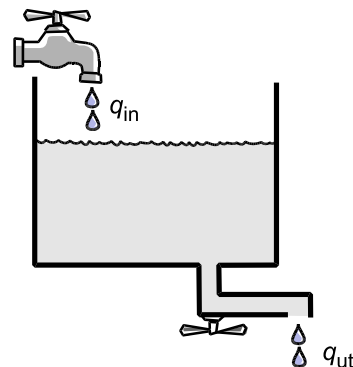
$$12 < x < 24$$

eftersom $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ och $\cos 0^\circ = 1$.

Svar $12 \text{ cm} < BC < 24 \text{ cm}$

Uppgift # 15 (2/4) Vattentank, modellbyggnad

15. En behållare som från början innehåller 300 liter vatten fylls på med en inflödes hastighet q_{in} enligt diagram 1. Vattnets utflödes hastighet q_{ut} framgår av diagram 2. Vätskevolymen vid en viss tidpunkt beror då på vilket värde på den konstanta utflödes hastigheten q_{ut} som valts.



- Beräkna hur mycket vätska behållaren innehåller efter 2 minuter respektive 5 minuter om utflödes hastigheten q_{ut} väljs till 40 liter/min.
- Undersök och beskriv så utförligt du kan hur vätskevolymen i behållaren beror av tiden och valet av utflödes hastighet.

(2/4)

Ändring i volym är inflöde minus utflöde

$$\frac{dV}{dt} = q_{in} - q_{ut}$$

$$dV = (q_{in} - q_{ut}) dt$$

$$\int_{300}^{V(t)} dV = \int_0^t (q_{in} - q_{ut}) dt$$

$$V(t) - 300 = \int_0^t (q_{in} - q_{ut}) dt$$

För de 5 första minuterna gäller att

$$q_{in} = 100 - 20 \cdot t$$

därefter gäller att

$$q_{in} = 0.$$

Utfloppet är q_{ut} om det finns vatten i behållaren, annars är flödet 0. Med $q_{ut} = 40$ fås

$$V(2) = 300 + \int_0^2 (100 - 20 \cdot t - 40) dt$$

$$V(2) = 300 + \int_0^2 (60 - 20 \cdot t) dt$$

$$V(2) = 300 + \left[60t - 20 \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 380$$

$$V(5) = 300 + \int_0^5 (100 - 20 \cdot t - 40) dt$$

$$V(5) = 300 + \int_0^5 (60 - 20 \cdot t) dt$$

$$V(5) = 300 + \left[60t - 20 \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^5 = 350$$

Skolverkets lösning missar att behandla fallet att tanken töms snabbt. För att behandla detta fall lös $V(t_0) = 0$. Alltså att tanken är tömd vid tiden t_0 som alltså är mindre än 5 minuter.

$$V(t) = 300 + \left[100t - 20 \cdot \frac{t^2}{2} - q_{ut} t \right]_0^t$$

$$V(t) = 300 + 100t - 10t^2 - q_{ut}t$$

$$0 = 300 + 100t_0 - 10t_0^2 - q_{ut}t_0$$

$$q_{ut}t_0 = 300 + 100t_0 - 10t_0^2$$

$$q_{ut} = \frac{300}{t_0} + 100 - 10t_0$$

(För att tömma tanken på 1 minut krävs $q_{ut} = 390$.)

För att tömma tanken på 5 minuter krävs $q_{ut} = 110$.

Om $q_{ut} < 110$ finns två fall. Fallet att $t \leq 5$ då gäller

$$V(t) = 300 + 100t - 10t^2 - q_{ut}t$$

och fallet att $t > 5$ då gäller att

$$V(t) = V(5) - q_{ut}(t - 5)$$

som gäller fram till tanken är tom, alltså

$$t = 5 + \frac{V(5)}{q_{ut}}$$

Om $q_{ut} > 110$ så är volymen

$$V(t) = 300 + 100t - 10t^2 - q_{ut}t$$

fram till tidpunkten då tanken är tom. Tidpunkten t_0 då tanken är tom är den positiva roten till

$$0 = 300 + 100t_0 - 10t_0^2 - q_{ut}t_0$$

$$0 = t_0^2 + \left(\frac{q_{ut}}{10} - 10\right)t_0 - 30$$

Ovanstående är en SKISS på lösning. Lösningen måste presenteras tydligare.