Innehåll

Förord

Uppgifter till kursen Matematik C duger utmärkt för träning till kurser enligt Gy 2011.
Denna version av lösningarna refererar till den FORMELSAMLING som hör till kursen Matematik 3.
Provet kommer inte att återanvändas enligt beslut från Skolverket Dnr:73-2009:215.

Kom ihåg
- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan
- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Del I # 1 (2/0) Derivera

1. Derivera

a) $f(x) = 2x^3 - 5x$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $g(x) = e^{2x} + 7$ *Endast svar fordras* (1/0)

Använd FORMELSAMLINGEN

Derivator

Funktion	Derivata
x^n där n är ett reellt tal	nx^{n-1}
a^x $(a > 0)$	$a^x \ln a$
e^x	e^x
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$

a) Funktionen är

$$f(x) = 2\,x^3 - 5\,x$$

då blir derivatan

$$f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^2 - 5$$

Svar a) $f'(x) = 6\,x^2 - 5$

b) Funktionen är

$$f(x) = e^{2x} + 7$$

då blir derivatan

$$f'(x) = 2\,e^{2x}$$

Svar b) $f'(x) = 2\,e^{2x}$

Kommentar Derivatan av konstanten 7 är 0.

Del I # 2 (2/0) Potensekvation & exponentialekvation

2.	Lös ekvationerna och svara exakt.		
a)	$6x^5 = 24$	*Endast svar fordras*	(1/0)
b)	$6^x = 24$	*Endast svar fordras*	(1/0)

a) I FORMELSAMLINGEN finns följande regler

Potenser	$a^x a^y = a^{x+y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$(a^x)^y = a^{xy}$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
	$a^x b^x = (ab)^x$	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a^0 = 1$

Börja med att städa, behåll x^5 i vänsterledet

$$
\begin{aligned}
x^5 &= \frac{24}{6} = 4 \\
(x^5)^{\frac{1}{5}} &= 4^{\frac{1}{5}} \\
x &= 4^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4}
\end{aligned}
$$

Svar a) $4^{\frac{1}{5}}$ alternativt $\sqrt[5]{4}$

b) Logaritmera exponentialekvationen $6^x = 24$ och använd FORMELSAMLINGEN för att få ner x på raden.

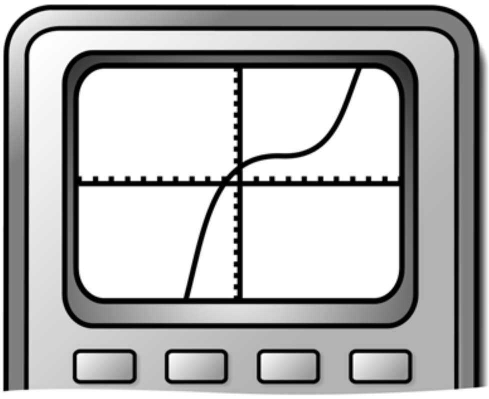
Logaritmer	$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$	$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$	
	$\lg x + \lg y = \lg xy$	$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$	$\lg x^p = p \cdot \lg x$

$$
\begin{aligned}
\log 6^x &= \log 24 \\
x \log 6 &= \log 24 \\
x &= \frac{\log 24}{\log 6}
\end{aligned}
$$

Svar b) $x = \dfrac{\log 24}{\log 6}$

Del I # 3 (1/0) Terrasspunkt?

3. Kalle har fått i uppgift att ta reda på hur grafen till en viss tredjegradsfunktion ser ut. Han ritar upp grafen på sin räknare, se figur.



Han säger: ”Det ser ut som om grafen har en terrasspunkt!”

Kan Kalle, utifrån den bild han ser på sin räknare, vara säker på att grafen har en terrasspunkt? Motivera ditt svar. (1/0)

En terrasspunkt är en punkt där funktionens derivata är noll och där teckenväxlingen är $+\,0\,+$ eller $-\,0\,-$. Här har vi inte kunskap om vad derivatan är i någon punkt. För att kunna vara säkra på vad derivatan är måste vi ha derivatan på parametrisk form (alltså en formel). I Appendix på sidan 26 finns fyra olika grafer presenterade som alla ser ut att ha en terrasspunkt. Endast en har terrasspunkt.

Kommentar När uppgiften till Kalle är att ta reda på hur grafen till en viss tredjegradsfunktion *ser ut* är Kalles svar att det *ser ut* som grafen har en terrasspunkt korrekt. Frågan till Kalle gällde inte vilken sorts extrempunkt som eventuellt döljer sig i grafen. För att kunna nyttja sin miniräknare måste Kalle veta formeln för tredjegradspolynomet. När Kalle vet formeln för polynomet är det en standardprocedur att undersöka extrempunkter.

Kommentar Skolverket skriver följande i rättningsnormen

> Det godtagbara svaret ska antingen kännetecknas av att eleven påpekar att det kan finnas maximi- och minimipunkter som inte syns
>
> *eller*
>
> av att eleven påpekar att *om* det är en terrasspunkt kan Kalle ändå inte vara säker på detta genom att endast titta på sin räknare eftersom han aldrig med blotta ögat kan se om kurvans tangent är horisontell eller har en positiv/negativ lutning.

Del I # 4 (2/2) Lös ekvationerna

4.	Lös ekvationerna		
	a)	$4x^3 - x^5 = 0$	(2/0)
	b)	$\lg x + \lg 2 = 3$	(0/2)

a) Ekvationen är

$$0 = 4x^3 - x^5.$$

Börja med att faktorisera ekvationen

$$0 = (\underbrace{4 - x^2}_{\text{1:a faktorn}}) \cdot \underbrace{x^3}_{\text{2:a faktorn}}$$

1:a faktorn $0 = 4 - x^2$ ger två rötter $x_1 = 2$ och $x_2 = -2$.
2:a faktorn $0 = x^3$ ger en trippelrot $x_3 = 0$

Svar a) $x_1 = +2$, $x_2 = -2$ och $x_3 = 0$

b) Ekvationen är

$$\lg x + \lg 2 = 3$$

Använd FORMELSAMLINGEN där finns följande formler.

Logaritmer	$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$	$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$	
	$\lg x + \lg y = \lg xy$	$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$	$\lg x^p = p \cdot \lg x$

$$\underbrace{\lg x + \lg 2}_{\lg 2x} = \underbrace{3}_{\lg 1000}$$

Vi har alltså

$$2x = 1000$$

Svar b) $x = 500$

Del I # 5 (1/0) Vilket alternativ?

5. För funktionen f gäller att $f(x) = \mathrm{e}^x$
Vilket av följande påståenden A-E är korrekt? *Endast svar fordras* (1/0)

A. f har egenskapen att för alla x gäller att $f'(x) = f(x)$

B. f är en exponentialfunktion med basen e där $\mathrm{e} \approx 1{,}718$

C. f har en graf som går genom punkten $(1,\ 0)$

D. f är avtagande för $x < 0$ och växande för $x > 0$

E. f har egenskapen att $f'(1) = 0$

A	KORREKT	se FORMELSAMLINGEN.
B	fel	Rätt värde är $e = 2{,}718281828459045\ldots$ här duger 2,718.
C	fel	$f(1) = e^1 = 2{,}718 \neq 0$
D	fel	$f'(x) = e^x > 0$ och därmed är funktionen växande för alla x.
E	fel	$f'(x) = e^x$ och därmed är $f'(1) = 2{,}718 \neq 0$.

Tecknet $\neq$ betyder *inte lika med* enligt internationell standard.

Svar Alternativ A är korrekt

Del I # 6 (1/1) Förenkla uttrycken

6. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt.

a) $$\frac{(17+x)^3}{(x+17)^2}$$ (1/0)

b) $$\frac{(8-2x)^3}{(4-x)^4}$$ (0/1)

a)

$$\frac{(17+x)^3}{(x+17)^2} = \frac{(x+17)^3}{(x+17)^2} = \frac{(x+17)(x+17)(x+17)}{(x+17)(x+17)} = x+17$$

Svar a) $x + 17.$

b) I FORMELSAMLINGEN finns räkneregler för potenser.

Potenser	$a^x a^y = a^{x+y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$(a^x)^y = a^{xy}$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
	$a^x b^x = (ab)^x$	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a^0 = 1$

Börja med att faktorisera $(8-2x) = 2(4-x)$.

$$\frac{(8-2x)^3}{(4-x)^4} = \frac{[2(4-x)]^3}{(4-x)^4} = \frac{2^3(4-x)^3}{(4-x)^4} = \frac{2^3}{(4-x)} = \frac{8}{(4-x)}$$

Svar b) $\frac{8}{(4-x)}$.

Del I # 7 (0/2) Ränta

7. Bertil sätter in B kr på ett konto som har en årlig räntesats av r %. Räntesatsen är oförändrad under den tid som pengarna finns på kontot. Kapitalet på kontot är K kr.

Teckna ett funktionsuttryck som anger hur kapitalet K beror av B och r om pengarna finns på kontot i tre år. *Endast svar fordras* (0/2)

Procent betyder hundradel och betecknas med symbolen %, r % betyder alltså $\frac{r}{100}$.

Efter 1 år har insatsen B växt till

$$B\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

Efter 2 år har insatsen B växt till

$$B\left(1+\frac{r}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

Efter 3 år är det totala kapitalet

$$K = B\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$

Svar $K = B\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$

Del I # 8 (4/3/⊗) Undersök egenskap hos extrempunkter

8. I den här uppgiften ska du undersöka en egenskap hos extrempunkterna till de funktioner som ges av $f(x) = 3x^2 - \frac{kx^3}{3}$ där k är en konstant.

Tabellen visar koordinaterna hos extrempunkterna till funktionen f för några olika värden på k.

k	Extrempunkt/er
-2	$(0,0)$ och $(-3,9)$
-1	$(0,0)$ och $(-6,36)$
0	$(0,0)$
1	$(0,0)$ och $(6,36)$
2	$(0,0)$ och $(3,9)$
3	

- Komplettera tabellen genom att beräkna koordinaterna för extrempunkterna då $k = 3$, det vill säga då funktionen ges av $f(x) = 3x^2 - x^3$
- Studera extrempunkterna i tabellen. De ligger på grafen till en annan funktion som vi kallar g. Ange det funktionsuttryck $g(x)$ som du tycker är troligt och motivera ditt val.
- Undersök så utförligt och fullständigt som möjligt om det alltid gäller att extrempunkterna till $f(x) = 3x^2 - \frac{kx^3}{3}$ ligger på grafen till funktionen g. (4/3/¤)

#1 Då $k = 3$ är

$$f(x) = 3x^2 - x^3$$

som har extrempunkter då $f'(x) = 0$ alltså

$$0 = 6\,x - 3\,x^2 = 3 \cdot \underbrace{x}_{x=0} \cdot \underbrace{(2-x)}_{x=2}.$$

Extrempunkterna blir

$$(0, f(0)) = (0, 0)$$

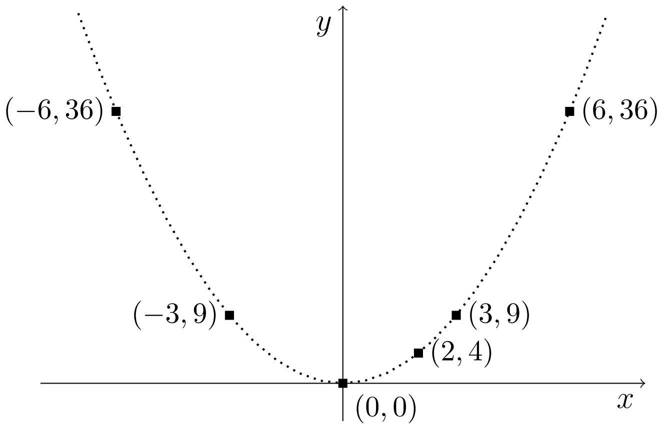
respektive

$$(2, f(2)) = (2, 4).$$

Tabellen blir

k	Extrempunkter
-2	(0,0) och (-3, 9)
-1	(0,0) och (-6,36)
0	(0,0)
1	(0,0) och (6,36)
2	(0,0) och (3, 9)
3	(0,0) och (2, 4)

#2 Rita figur. Punkterna ligger på grafen till ett 2:a gradspolynom med minimum i origo. Polynomet $g(x) = x^2$ passar till samtliga punkter i tabellen.



#3 Undersökning för godtyckligt k. Polynomet

$$f(x) = 3\,x^2 - \frac{k\,x^3}{3} \tag{1}$$

har extrempunkter då $f'(x) = 0$ alltså då

$$0 = 6\,x - k\,x^2 = \underbrace{x}_{\text{1:a faktorn}} \cdot \underbrace{(6 - k \cdot x)}_{\text{2:a faktorn}}. \tag{2}$$

1:a faktorn i ekvation (2) ger lösningen

$$x_1 = 0.$$

2:a faktorn i ekvation (2) ger lösningen

$$x_2 = \frac{6}{k}$$

då $k \neq 0$. För fallet $k = 0$ ger 2:a faktorn ingen lösning eftersom 2:a faktorn är 6 när $k = 0$. När $k = 0$ så degenerar 3:e gradspolynomet (1) till ett 2:a gradspolynom som endast har en minimipunkt $(0, 0)$.
Hur är det med $f(x_2)$? Beräkna

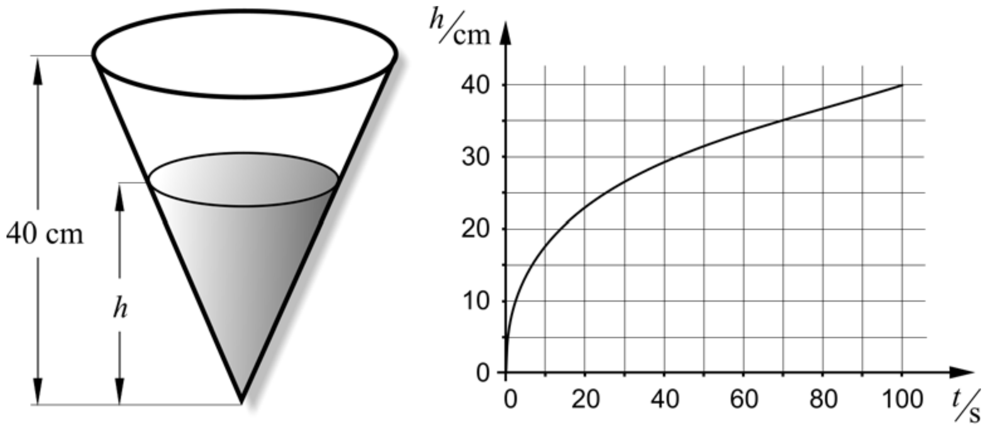
$$\begin{aligned}
f(x_2) &= 3\left(\frac{6}{k}\right)^2 - \frac{k\left(\frac{6}{k}\right)^3}{3} \\
f(x_2) &= \frac{3 \cdot 6^2}{k^2} - \frac{k \cdot 6^3}{3 \cdot k^3} \\
f(x_2) &= \frac{3 \cdot 6^2}{k^2} - \frac{2 \cdot 6^2}{k^2} = \frac{6^2}{k^2} = x_2^2.
\end{aligned}$$

Sammanfattning

För fallet $k = 0$ ligger den enda extrempunkten (minimipunkt) $(0, 0)$ på grafen till $g(x) = x^2$. För fallet $k \neq 0$ ligger bägge extrempunkter x_1 och x_2 på grafen till $g(x) = x^2$. Det gäller alltså oberoende av k att extrempunkterna till $f(x)$ ligger på grafen till polynomet $g(x) = x^2$.

Del II # 9 (2/1) Konisk behållare

9. En konisk behållare fylls med vatten. Diagrammet visar hur vattennivåns höjd *h* i centimeter beror av tiden *t* i sekunder.



a) Det tar 100 sekunder att fylla behållaren. Med vilken medelhastighet ökar vattennivåns höjd *h* under tidsperioden $10 \le t \le 100$? (2/0)

b) Tolka vad $h'(50) = 0{,}20$ betyder i detta sammanhang, det vill säga då konen fylls med vatten. (0/1)

a) Bestäm medelhastigheten under tidsperioden $10 < t < 100$.

$$\begin{aligned}\text{medelhastighet} &= \frac{\Delta h}{\Delta t}\\ \Delta t &= 100 - 10\\ \Delta h &= h_{\text{slut}} - h_{\text{start}}\end{aligned}$$

Avläsning av höjden då $t = 100$ ur figuren ger

$$h_{\text{slut}} = 40$$

och höjden då $t = 10$ ger

$$\begin{aligned}h_{\text{start}} &= 17{,}5\\ \text{medelhastighet} &= \frac{40 - 17{,}5}{100 - 10} = 0{,}25\end{aligned}$$

Svar a) Medelhastigheten är 0,25 cm/s.

Svar b) $h'(50) = 0{,}20$ betyder att vattennivån ökar med 0,20 cm/s då $h = 50$ cm.

Del II # 10 (2/0) Lisas föräldrar spar

10. Lisas föräldrar sätter in 1000 kr i slutet av varje år på ett konto. Den årliga räntesatsen är 3 %. Föräldrarna gör den första insättningen det år Lisa fyller 2 år och sätter sedan in pengar till och med det år hon fyller 30 år.
Hur mycket pengar kommer det att finnas på kontot direkt efter den sista insättningen? (2/0)

Använd FORMELSAMLINGEN.

Geometrisk summa	$a + ak + ak^2 + ... + ak^{n-1} = \dfrac{a(k^n - 1)}{k - 1}$	där $k \neq 1$

Notera hur $n-1$ och n förekommer i formeln för summa av geometrisk serie. Vänsterledet i formeln har n stycken termer numrerade från 0 till $n-1$. I Lisas fall blir termerna

$$\frac{1000 \cdot (1{,}03^{29} - 1)}{1{,}03 - 1} = \underbrace{1000}_{\substack{\text{Lisa 30 år} \\ 1{,}03^0}} + \underbrace{1000 \cdot 1{,}03}_{\substack{\text{Lisa 29 år} \\ 1{,}03^1}} + \cdots + \underbrace{1000 \cdot 1{,}03^{28}}_{\substack{\text{Lisa 2 år} \\ 1{,}03^{28}}}.$$

Högerledet i serien ovan har 29 termer numrerade från 0 till 28.
Miniräknaren ger

$$\frac{1000 \cdot (1{,}03^{29} - 1)}{1{,}03 - 1} = 45\,219$$

Svar 45 219 kr.

Kommentar I problem av denna typ är det viktigt att vara noggrann. Det är lätt att göra fel på antalet termer.

Del II # 11 (0/1) Rationellt uttryck

11. Ge ett exempel på ett rationellt uttryck som inte är definierat för $x = 3$ och som har värdet 2 då $x = 0$ *Endast svar fordras*	(0/1)

Ett rationellt tal är kvoten av två heltal, exempelvis $\frac{p}{q}$ där p och q är heltal. Talet q får inte vara 0, då det inte går att dividera med noll. Ett rationellt uttryck är kvoten av två polynom, exempelvis

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

där $P(x)$ och $Q(x)$ är polynom. Uttrycket är definierat för alla x utom de x där $Q(x) = 0$. Det går inte att dividera med noll.

Vi ska skapa ett rationellt uttryck som inte är definierat för $x = 3$. Det rationella uttrycket

$$\frac{P(x)}{x-3}$$

är inte definierat för $x = 3$ och har värdet

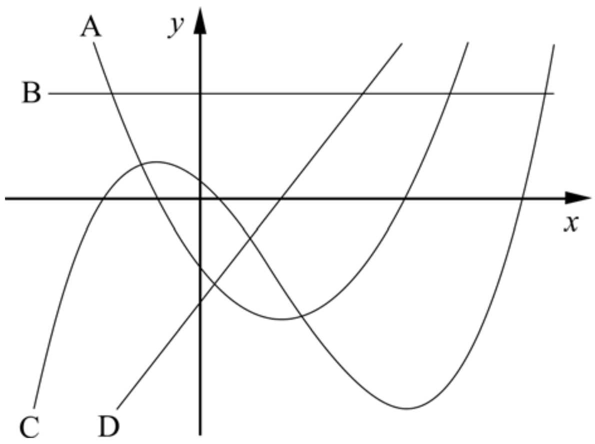
$$\frac{P(0)}{0-3}$$

då $x = 0$. Enligt uppgiften ska vi skapa ett rationellt uttryck som har värdet 2 då $x = 0$. Välj lämpligt $P(x)$. Det finns många möjligheter exempelvis $P(x) = -6$ eller $P(x) = x - 6$.

Svar Uttrycket $\frac{x-6}{x-3}$ uppfyller de två kraven.

Del II # 12 (1/1) Funktioner

12. Figuren visar graferna till fyra funktioner *p*, *q*, *r* och *s*.



Funktionen *p* är en polynomfunktion av tredje graden. De andra funktionerna har bildats genom upprepad derivering av *p*, det vill säga:

$q(x) = p'(x)$

$r(x) = q'(x)$

$s(x) = r'(x)$

Para ihop funktionerna *p*, *q*, *r* och *s* med tillhörande graf A, B, C och D.

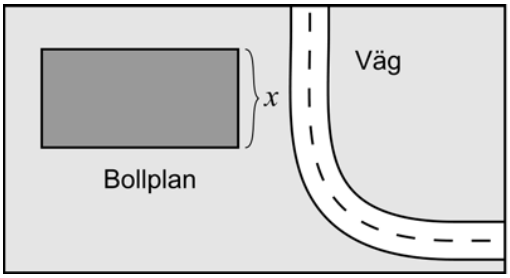
Endast svar fordras (0/1)

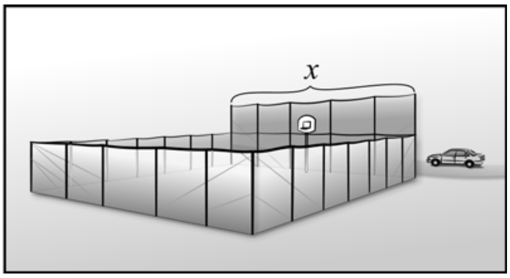
p	C	Endast kurvan C i bilden är en 3:e gradsfunktion
$q = p'$	A	Derivatan av 3:e gradsfunktion är 2:a gradsfunktion. Kurvan A är en 2:a gradsfunktion med ett minimum.
$r = p'$	D	Derivatan av en 2:a gradsfunktion äe en 1:a gradsfunktion, alltså en linjär funktion. Kurvan D är en linjär funktion med lutning.
$s = r'$	B	Derivatan av en linjär funktion med konstant lutning är konstant. Kurvan B är en konstant funktion

Svar se ovan.

Del II # 13 (3/2/⊗) Maximal area

13. Garfesta kommun ska bygga en bollplan. Den ska vara rektangulär med stängsel runtomkring. För att inte bollarna ska hamna ute på vägen bestämmer man sig för att bygga ett högre stängsel på den sida som ligger närmast vägen, se figur.





Kommunen har bestämt att stängslet maximalt får kosta 6600 kr. Det lägre stängslet kostar 75 kr/m och det högre 225 kr/m. Kostnaden för stolpar och grindar ingår i priset för stängslet.

Om kommunen använder 6600 kr till stängslet kan bollplanens area A m^2 beräknas enligt nedanstående samband:

$A(x) = 44x - 2x^2$ där x m är längden på bollplanens sida närmast vägen.

a) Bestäm med hjälp av derivata det värde på x som ger bollplanens maximala area. (3/0)

b) Visa att bollplanens area A m^2 kan skrivas $A(x) = 44x - 2x^2$ (0/2/¤)

a) Derivera funktionen

$$A(x) = 44\,x - 2\,x^2$$

Använd FORMELSAMLINGEN där finns

Derivator

Funktion	Derivata
x^n där n är ett reellt tal	nx^{n-1}

$$A'(x) = 44 - 2 \cdot 2\,x$$

Derivatan är noll vid extremvärden. Lös ekvationen

$$0 = 44 - 4\,x$$

som ger

$$x = 11.$$

Med teckentabell konstateras att $A(11)$ är en maximipunkt.

x	$x = 10$	$x = 11$	$x = 12$
$A'(x)$	$+$	0	$-$
$A(x)$	växer	max-punkt	avtar

Alternativt kan man konstatera att ett 2:a gradspolynom har exakt en extrempunkt som antingen är ett maximum eller minimum. När koefficienten framför x^2 är negativ som i detta fall så har polynomet ett maximum.

Svar a) $x = 11$ ger maximal area till bollplanen.

b) Planens area

$$A = x \cdot y$$

där x är längden av sidan (kortsida) enligt uppgiftens figur och y är andra sidan (långsida). Kostnaden för stängslet är 6600 kr.

$$\begin{aligned}
6600 &= \underbrace{225 \cdot x}_{\text{höga kortsidan}} + \underbrace{75 \cdot y}_{\text{långsida}} + \underbrace{75 \cdot x}_{\text{kortsida}} + \underbrace{75 \cdot y}_{\text{långsida}} \\
6600 &= 300 \cdot x + 150 \cdot y \\
\frac{6600}{150} &= \frac{300}{150}\,x + \frac{150}{150}\,y \\
44 &= 2\,x + y \\
y &= 44 - 2\,x \\
A(x) &= x\,(44 - 2\,x) = 44\,x - 2\,x^2
\end{aligned}$$

Svar b) Planens area kan skrivas $A(x) = 44\,x - 2\,x^2$.

Kommentar Bollplanens maximala area $A(11) = 242$ m^2 men denna uppgift efterfrågades inte. Var noga! Svara alltid på det som frågas efter.

Del II # 14 (3/2/⊗) Jordbävningar

14. I Sverige är jordbävningar vanligare än vad man kan tro, men oftast är de så svaga att de knappt märks. Med hjälp av Richterskalan kan styrkan i en jordbävning anges med magnituden M.

Magnituden M ges av sambandet $M = \frac{2}{3}(\lg E - 4{,}84)$

där E är den frigjorda energin mätt i enheten joule, J.

a) Den 16 december 2008 skakades Skåne av en jordbävning som var kraftig för att vara i Sverige. Då frigjordes energin $2{,}75 \cdot 10^{11}$ J.
Vilken magnitud motsvarar detta på Richterskalan? (1/0)

b) Den kraftigaste uppmätta jordbävningen i Sverige kallas Kosteröskalvet och det inträffade den 23 oktober 1904. Magnituden mätte 5,4 på Richterskalan. Hur mycket energi frigjordes vid Kosteröskalvet? (2/0)

c) Utgå från två olika jordbävningar där den ena har en magnitud som är 5 och den andra har en magnitud som är 7. Hur många gånger större är den frigjorda energin hos den kraftigare jordbävningen jämfört med den frigjorda energin hos den svagare? (0/1)

d) Utgå återigen från två olika jordbävningar där den ena har en magnitud som är två enheter större än den andra. Undersök generellt hur många gånger större den frigjorda energin är hos den kraftigare jordbävningen jämfört med den frigjorda energin hos den svagare. (0/1/¤)

a) Beräkna magnituden M för energin $E = 2{,}75 \cdot 10^{11}$ J.

$$\underbrace{M}_{\text{plocka ut}} = \frac{2}{3}(\lg \overbrace{E}^{\text{stoppa in}} - 4{,}84)$$

$$M = \frac{2}{3}\left(\lg(2{,}75 \cdot 10^{11}) - 4{,}84\right)$$

$$M = \frac{2}{3}(11{,}44 - 4{,}84) = 4{,}40$$

Svar a) $M = 4{,}40$

b) Beräkna energin E för magnituden $M = 5,4$.

$$\overbrace{M}^{\text{stoppa in}} = \frac{2}{3}(\lg \underbrace{E}_{\text{plocka ut}} - 4{,}84)$$

Möblera om så att $\lg E$ blir fritt.

$$\lg E = \frac{3}{2}M + 4{,}84 \quad (1)$$

Nu vet vi $\lg E$ men behöver E. Använd FORMELSAMLINGEN där finns följande.

Logaritmer	$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$	$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$	
	$\lg x + \lg y = \lg xy$	$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$	$\lg x^p = p \cdot \lg x$

$$E = 10^{\lg E} = 10^{\frac{3}{2}M+4{,}84} \quad (2)$$

Stoppa in $M = 5{,}4$ i ekvation (2). Vi får

$$E = 10^{\frac{3}{2}5{,}4+4{,}84} = 10^{12{,}94} = 8{,}71 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

Svar b) $E = 8{,}71 \cdot 10^{12}$ J.

c) Jämför energin för magnituden $M = 5$ och $M = 7$. Använd den tidigare formeln (2). Låt E_5 beteckna energin för magnituden 5 och E_7 beteckna energin för magnituden 7. Bestäm kvoten

$$\frac{E_7}{E_5} = \frac{10^{\frac{3}{2}7+4{,}84}}{10^{\frac{3}{2}5+4{,}84}}.$$

Använd FORMELSAMLINGEN och förenkla kvoten.

Potenser	$a^x a^y = a^{x+y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$(a^x)^y = a^{xy}$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
	$a^x b^x = (ab)^x$	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a^0 = 1$

$$\frac{E_7}{E_5} = \frac{10^{\frac{3}{2}7+4{,}84}}{10^{\frac{3}{2}5+4{,}84}} = 10^{(\frac{3}{2}7+4{,}84-\frac{3}{2}5+4{,}84)} = 10^{(\frac{3}{2}7-\frac{3}{2}5)} = 10^3 \quad (3)$$

Svar c) 1000 gånger större.

d) Jämför energin för magnituden M och $M+2$. Använd den tidigare formeln (2). Låt E_M beteckna energin för magnituden M och E_{M+2} beteckna energin för magnituden $M+2$. Bestäm kvoten

$$\frac{E_{M+2}}{E_M} = \frac{10^{\frac{3}{2}(M+2)+4{,}84}}{10^{\frac{3}{2}M+4{,}84}} = 10^{\frac{3}{2}2} = 10^3.$$

Svar d) 1000 gånger större.

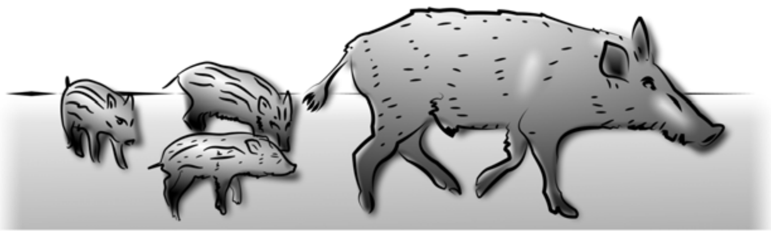
(4)

Del II # 15 (0/3) Vildsvinen ökar kraftigt

15. Antalet vildsvin i Sverige ökar kraftigt. Från en rapport är följande citat hämtat:

> År 2007 beräknades antalet vildsvin uppgå till cirka 60000 från Skåne och upp till Dalälven som ännu så länge utgör den nordliga gränsen för utbredningen.
> ---
> Från 1990 till 2007 har vildsvinspopulationen haft en så stark tillväxt att antalet vildsvin i Sverige fördubblats vart femte-sjätte år.
>
> Källa: Svensk Naturförvaltning AB (2008), Rapport 04, *Vildsvin, jakt och förvaltning*

Anta att antalet vildsvin uppskattas vid samma tidpunkt varje år.



Utifrån citatet kan man göra olika prognoser om antalet vildsvin i Sverige i framtiden.

Hur många vildsvin kan det finnas *som mest* i Sverige när man uppskattar antalet år 2011 om tillväxten fortsätter i den takt som beskrivs ovan? (0/3)

Vildsvinen fördubblas på 5–6 år. Vi väljer att beskriva populationens ökning med följande exponentialekvation

$$2\,C = C\,a^t$$

som beskriver hur polulationen ökar från C till $2C$ under tidsintervallet t. Med $t = 5$ år får vi

$$2 = a^5$$

där a kan skrivas på några olika sätt.

$$a = 2^{\frac{1}{5}} = 2^{0,2} = \sqrt[5]{2} = 1{,}1487$$

Fördubbling på tidsintervallet 6 år ger ett något mindre värde på a. För att beräkna det antal vildsvin *som mest* kan finnas efter 4 år (2011-2007) använder vi det största värdet på a och beräknar

$$\text{max antal} = 60\,000 \cdot 1{,}1487^4 \approx 104\,000$$

Svar Max antal vildsvin år 2011 kan uppskattas till 104 000.

Del II # 16 (0/3) Derivatans värde ...

16. Nedan ges derivatans värde hos en funktion f i en given punkt P.

$$\lim_{h\to 0}\frac{((2+h)^5+3)-(2^5+3)}{h}=80$$

a) Ange funktionen f *Endast svar fordras* (0/1)

b) En tangent dras i punkten P. Bestäm tangentens ekvation. (0/2)

Använd FORMELSAMLINGEN där finns derivatans definition.

Derivatans definition $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Svar a) $f(x)=x^5+3$

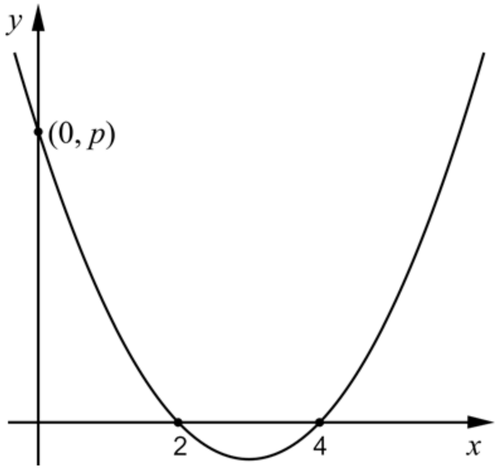
b) Punkten P har x-koordinaten $x=2$ och y-koordinat $f(2)=2^5+3=35$. Punkten P är alltså $(2,35)$. Den sökta tangenten är en rät linje som går genom punkten $(2,35)$ och har riktningskoefficienten $k=80$.

$$\overbrace{y}^{35} = \overbrace{k\cdot x}^{80\cdot 2} + \underbrace{m}_{-125}$$

Svar b) Tangentens ekvation är $y=80\cdot x-125$.

Del II # 17 (0/2/⊗) Tangent till andragradspolynom

17. Nedan visas grafen till en andragradsfunktion som har nollställena $x_1 = 2$ och $x_2 = 4$, se figur. Grafen skär y-axeln i punkten $(0, p)$.



Anta att vi drar en tangent till grafen i punkten $(0, p)$. Bestäm lutningen för denna tangent uttryckt i p. (0/2/¤)

Lutningen för en tangent är derivatan i punkten, här är det punkten $(0, p)$ som är aktuell. För att kunna derivera måste funktionen vara känd. I detta problem är 2:a gradsfunktionen inte känd. Börja med att bestämma 2:a gradsfunktionen. Funktionen går genom tre olika punkter. Det finns olika möjligheter att bestämma funktionen.

Lösning, variant ABC

Tangentens lutning i punkten $(0, p)$ är derivatan till 2:a gradspolynomet i punkten. Antag att polynomet beskrivs med

$$y(x) = A\,x^2 + B\,x + C$$

då blir derivatan

$$y'(x) = A\,2\,x + B$$

och derivatan i den efterfrågade punkten $(0, p)$ blir

$$y'(0) = B$$

Vi har tre okända A, B, C och samtidigt känner vi tre olika punkter $(0, p)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$ som grafen går genom. Bilda tre ekvationer.

$$p = A \cdot 0^2 + B \cdot 0 + C \quad (1)$$

$$0 = A \cdot 2^2 + B \cdot 2 + C \quad (2)$$

$$0 = A \cdot 4^2 + B \cdot 4 + C \quad (3)$$

ekvation (1) ger

$$C = p. \tag{4}$$

Ekvation (2) och (3) ger med lösningen (4)

$$-p = A \cdot 4 + B \cdot 2 \tag{5}$$

$$-p = A \cdot 16 + B \cdot 4 \tag{6}$$

Eliminera den icke intressanta A ur ekvationerna (5) och (6) . Ekvation (6)-4×(5) ger

$$3\,p = B \cdot (-4).$$

Den efterfrågade derivatan $y'(0)$ i punkten $(0, p)$ är alltså $B = \dfrac{-3\,p}{4}$.

Lösning, variant nollställen

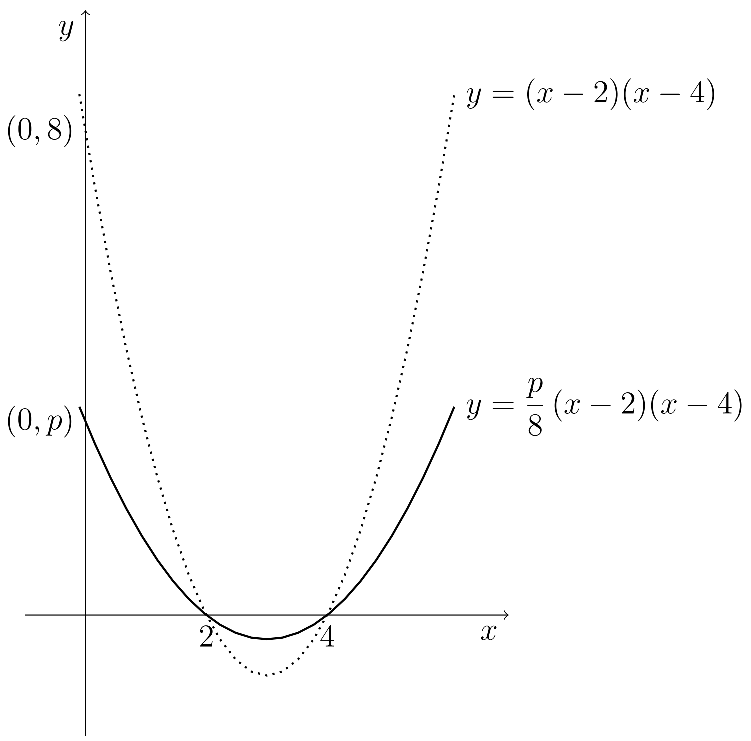
Det finns många olika 2:a gradsfunktioner som har nollställen $x = 2$ och $x = 4$. Varje värde på K i polynomet

$$y = K\,(x-2)(x-4)$$

ger ett polynom med nollställen $x = 2$ och $x = 4$. Vi ska välja K så att polynomet går genom punkten $(0, p)$. Detta betyder att

$$p = K\,(0-2)(0-4)$$

vilket ger $K = \dfrac{p}{8}$.



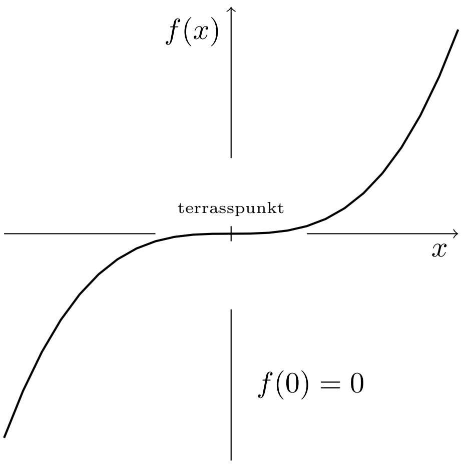
$$
\begin{aligned}
y &= \frac{p}{8}\,(x-2)(x-4)\\
y &= \frac{p}{8}\,(x^2-6\,x+8)\\
y' &= \frac{p}{8}\,(2\,x-6)\\
y'(0) &= \frac{p}{8}\,(2\cdot 0-6) = \frac{-3\,p}{4}
\end{aligned}
$$

Svar Lutningen för tangenten i punkten $(0, p)$ är $\dfrac{-3\,p}{4}$.

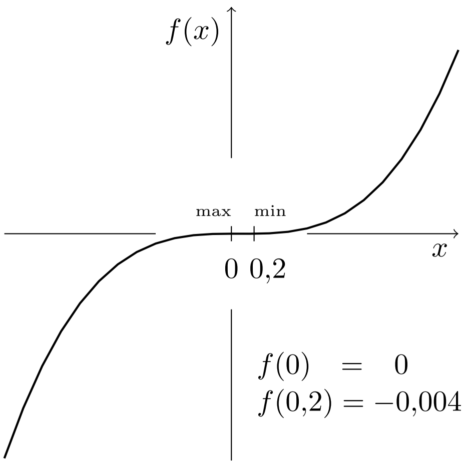
Appendix

Här presenteras fyra olika grafer som alla ser ut att ha en terrasspunkt. Funktionerna är $f(x) = x^3$ och tre varianter. Endast $f(x) = x^3$ har terrasspunkt med teckenväxlingen $+\,0\,+$. Med $\delta = 0{,}3$ får vi följande fyra grafer.

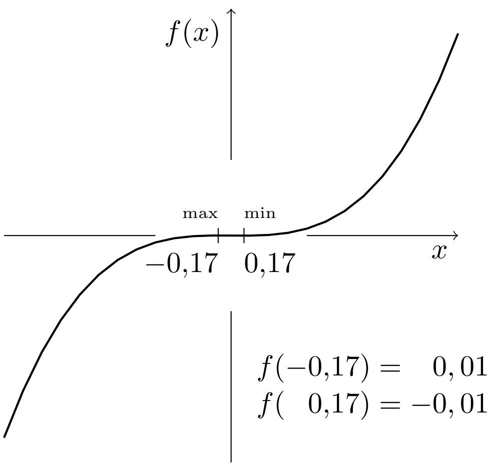
A $f(x) = x^3$



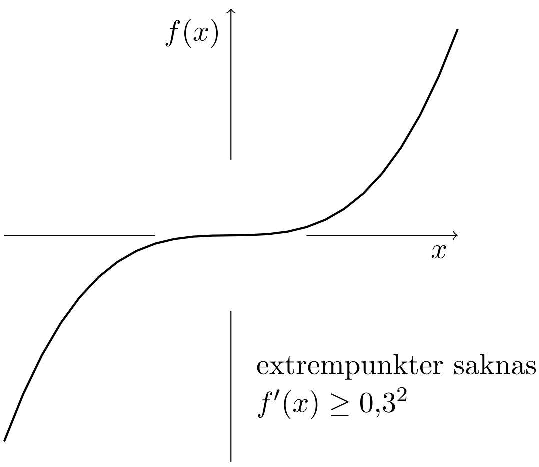
B $f(x) = x^2(x - \delta)$



C $f(x) = (x - \delta)\,x\,(x + \delta)$



D $f(x) = x(x^2 + \delta^2)$



A Terrasspunkt

Studera fallet med en trippelrot för $x = 0$

$$f(x) = x^3.$$

Bestäm extrempunkter, derivera.

$$f'(x) = 3\,x^2$$

Bestäm x där $f'(x) = 0$.

$$0 = 3\,x^2$$

Derivatans har en dubbelrot för

$$x_{1,2} = 0.$$

Andraderivatan är

$$f''(x) = 6\,x.$$

x		$x = 0$	
$f(x)$	$\nearrow$	0 terrasspunkt	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f''(x)$		0	

Andraderivatan $f''(0) = 0$ duger inte för att avgöra extrempunktens typ.

B Max- & min-punkt

Studera fallet med en dubbelrot för $x = 0$ och en tredje rot för $x = \delta$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\,(x-\delta) \\ f(x) &= x^3 - x^2\delta \end{aligned}$$

Bestäm extrempunkter, derivera.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\,x^2 - 2\,x\,\delta \\ f'(x) &= 3\,x\,(x - \frac{2}{3}\,\delta) \end{aligned}$$

Bestäm x där $f'(x) = 0$.

$$0 = x\,(x - \frac{2}{3}\,\delta)$$

Derivatans nollställen är $x_1 = 0$ och $x_2 = \dfrac{2}{3}\delta$.

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(\frac{2}{3}\delta) &= \left(\frac{2}{3}\delta\right)^2\left(\frac{-1}{3}\delta\right) = \frac{-4}{27}\delta^3 \end{aligned}$$

Andraderivatan är

$$f''(x) = 6\,x - 2\,\delta.$$

x		$x=0$		$x=\frac{2}{3}\delta$	
$f(x)$	$\nearrow$	0 max	$\searrow$	$\frac{-4}{27}\delta^3$ min	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$-2\,\delta$		$2\,\delta$	

När det fungerar är det enklare att nyttja andraderivatan för att avgöra extrempunkternas typ än teckentabell. I detta fall fungerar det utmärkt med att nyttja andraderivatan. Här är $f''(0) = -2\,\delta < 0$ och punkten $(0,0)$ är alltså en max-punkt. Kom ihåg att för figurerna på på sidan 26 är $\delta = 0{,}3$, vi har positiva δ. För den andra extrempunkten gäller att $f''(\frac{2}{3}\delta) = 2\,\delta > 0$ och punkten $(\frac{2}{3}\delta, \frac{-4}{27}\delta^3)$ är alltså en min-punkt.

C Max- & min-punkt, variant

Studera fallet med en enkelrot för $x = 0$ och två rötter enligt $x = \pm\delta$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\delta)\,x\,(x+\delta) \\ f(x) &= x\,(x^2-\delta^2) \\ f(x) &= x^3 - x\,\delta^2 \end{aligned}$$

Bestäm extrempunkter, derivera.

$$f'(x) = 3\,x^2 - \delta^2$$

Bestäm x där $f'(x) = 0$.

$$0 = x^2 - \frac{1}{3}\,\delta^2$$

Derivatans nollställen är $x_1 = \dfrac{-\delta}{\sqrt{3}}$ och $x_2 = \dfrac{+\delta}{\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned} f(\frac{-\delta}{\sqrt{3}}) &= \frac{2\sqrt{3}}{9}\delta^3 \\ f(\frac{+\delta}{\sqrt{3}}) &= \frac{-2\sqrt{3}}{9}\delta^3 \end{aligned}$$

Andraderivatan är

$$f''(x) = 6\,x$$

x		$x = \dfrac{-\delta}{\sqrt{3}}$		$x = \dfrac{+\delta}{\sqrt{3}}$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\delta^3$ max	$\searrow$	$\dfrac{-2\sqrt{3}}{9}\delta^3$ min	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$-2\sqrt{3}\,\delta$		$2\sqrt{3}\,\delta$	

Här är $f''(\frac{-\delta}{\sqrt{3}}) = -2\sqrt{3}\,\delta < 0$ och punkten $(\frac{-\delta}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\delta^3)$ är alltså en max-punkt. Kom ihåg att för figurerna på på sidan 26 är $\delta = 0{,}3$, vi har positiva δ. För den andra extrempunkten gäller att $f''(\frac{-\delta}{\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3}\,\delta > 0$ och punkten $(\frac{\delta}{\sqrt{3}}, \frac{-2\sqrt{3}}{9})\delta^3$ är alltså en min-punkt.

D Extrempunkter saknas

Studera fallet med en enkelrot för $x = 0$ och två komplexa rötter enligt $x = \pm i\delta$

$$\begin{aligned} f(x) &= x\,(x^2 + \delta^2) \\ f(x) &= x^3 + x\,\delta^2 \end{aligned}$$

Bestäm extrempunkter, derivera.

$$f'(x) = 3\,\underbrace{x^2}_{\geq 0} + \delta^2 \geq \delta^2$$

Funktionen $f(x)$ saknar extrempunkter. Funktionen har positiv derivata för alla x och är därför strikt växande.

Bonusfråga

Är kurvan nedan en del av en rät linje eller en del av cirkel med mycket stor radie?