

Innehåll

Förord	2
Förslag på lösningar till uppgifter utan miniräknare	3
Del I # 1 (2/0) Derivera	3
Del I # 2 (1/0) Lokalt maximum	3
Del I # 3 (2/0) Maximal höjd	4
Del I # 4 (1/0) Bryt ut och förenkla	5
Del I # 5 (1/0) Förenkla	5
Del I # 6 (1/0) Konstant lutning?	6
Del I # 7 (0/2) Lös ekvation	7
Del I # 8 (1/1/⊗) Är $\lg 9 < 1$?	8
Del I # 9 (1/1) Lika lutning hos grafer	11
Del I # 10 (0/1/⊗) Ett bevis	12
Förslag på lösningar till uppgifter med miniräknare	13
Del II # 11 (3/0) Geometrisk summa	13
Del II # 12 (2/1) Beräkna maximum	14
Del II # 13 (2/0) Grafritande miniräknare	15
Del II # 14 (0/2) Exponentialfunktionen	16
Del II # 15 (3/2/⊗) Formler i sjukamp	17
Del II # 16 (2/1/⊗) Derivering på olika sätt	20
Del II # 17 (0/4/⊗) Exponentiell avsvälning	22
Del II # 18 (3/4/⊗) Volymoptimering av paket	25

Förord

Uppgifter till kursen Matematik C duger utmärkt för träning till kurser enligt Gy 2011. Denna version av lösningarna refererar till den **FORMELSAMLING** som hör till kursen Matematik 3.

Kom ihåg

- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan

- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ma2				4	5									14				
Ma3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		12	13		15	16	17	18
M3b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		15	16	17	18

Del I # 1 (2/0) Derivera**1.** Bestäm derivatan till

a) $f(x) = x^3 - 6x$

Endast svar fordras (1/0)

b) $f(x) = 5e^{4x}$

Endast svar fordras (1/0)

Använd FORMELSAMLINGEN.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x \\ f'(x) &= 3x^2 - 6 \end{aligned}$$

Svar a) $f'(x) = 3x^2 - 6$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5e^{4x} \\ f'(x) &= 5 \cdot 4e^{4x} = 20e^{4x} \end{aligned}$$

Svar b) $f'(x) = 20e^{4x}$.**Del I # 2 (1/0) Lokalt maximum****2.** Funktionen $y = f(x)$ har ett lokalt maximum för $x = 5$
Vilket värde har $f'(5)$?*Endast svar fordras* (1/0)

Vid lokalt extremvärde (maximum eller minimum) är alltid derivatan 0.

Svar $f'(5) = 0$.

Del I # 3 (2/0) Maximal höjd

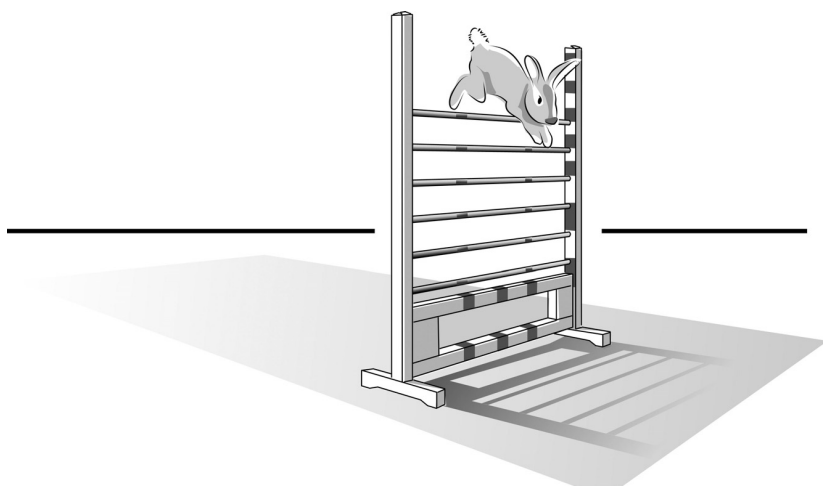
3. Kaninen Tösen från Danmark satte 1997 världsrekord i höjdhop för kaniner. Enligt en modell gäller att Tösens höjd under hoppet ges av

$$h(x) = 4x - 4x^2$$

där h är höjden i meter över golvet och där x är avståndet i meter längs golvet från avstampet.

Beräkna med hjälp av derivata Tösens maximala hopp höjd.

(2/0)



Höjden h ges av

$$h(x) = 4x - 4x^2$$

Derivera. Använd FORMELSAMLINGEN.

$$h'(x) = 4 - 4 \cdot 2x = 4 - 8x$$

Vid maximum är derivatan 0.

$$0 = 4 - 8x$$

Beräkna maximal höjd $h(0,5)$

$$h(0,5) = 4 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0,5^2 = 2 - 1 = 1$$

Svar Maximipunktens x -koordinat är 0,5 och maximal höjd är 1 meter.

Del I # 4 (1/0) Bryt ut och förenkla

Ma2
Ma3

4. Bryt ut och förenkla $\frac{14-2x}{7-x}$	(1/0)
--	-------

$$\frac{14-2x}{7-x} = \frac{2(7-x)}{7-x} = \frac{2}{1} = 2$$

Svar 2.

Del I # 5 (1/0) Förenkla

Ma2
Ma3

5. Använd konjugatregeln och förenkla $\frac{a+3}{a^2-9}$	(1/0)
--	-------

Använd FORMELSAMLINGEN

Regler

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\underline{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\frac{a+3}{a^2-9} = \frac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \frac{1}{a-3}$$

Svar $\frac{1}{a-3}$

Del I # 6 (1/0) Konstant lutning?

- 6.** En kompis till dig funderar på hur kurvan $y = 2x^2 + 3$ ser ut och påstår sedan:
”Lutningen är alltid lika med 4, överallt på kurvan.”

Har din kompis rätt? Motivera ditt svar.

(1/0)

“Lutning” betyder derivata. Derivera funktion

$$y = 2x^2 + 3.$$

Använd FORMELSAMLINGEN. Vi får

$$y' = 2 \cdot 2x = 4x$$

och denna funktion är inte konstant.

Svar Lutningen är inte konstant.

Del I # 7 (0/2) Lös ekvation

7. Lös ekvationen $x^3 - x(8x - 16) = 0$ (0/2)

Städa och bryt ut faktorn x

$$0 = \underbrace{(x^2 - 8x + 16)}_{\text{2:a gradsekv}} \cdot \underbrace{x}_{x=0}$$

Vi har nu en lösning

$$x_1 = 0.$$

Lös 2:a gradsekvationen med pq-formeln som finns i FORMELSAMLINGEN.

$$\text{Andragradsekvationer} \quad x^2 + px + q = 0 \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

2:a gradsekvationen är

$$0 = x^2 \underbrace{-8}_{p=-8} x \underbrace{+16}_{q=+16}.$$

pq-formeln ger

$$x_2 = +4 + \sqrt{4^2 - 16} = 4 + 0 = 4$$

$$x_3 = +4 - \sqrt{4^2 - 16} = 4 - 0 = 4.$$

Svar $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ och $x_3 = 4$.

Kommentar En tredjegrads ekvation har alltid minst en rot och högst tre rötter. På sidan 15 uppgift 13 finns grafer som illustrerar de olika möjliga fallen.

Kommentar Du får *inte* svara $x_1 = 0$ och $x_2 = 4$. Du måste ha med den tredje roten $x_3 = 4$.

Del I # 8 (1/1/⊗) Är $\lg 9 < 1$?**8.** Är $\lg 9$ större eller mindre än 1? Motivera ditt svar.

(1/1/⊗)

Använd FORMELSAMLINGEN

Logaritmer

$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$

$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

$\lg x + \lg y = \lg xy$

$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$

$\lg x^p = p \cdot \lg x$

Följande tabell visar att $\lg 9 < 1$.

$1 = 10^0$	annorlunda uttryckt	$\lg 1 = 0$
$9 = 10^{\lg 9}$		$\lg 9 < 1$
$10 = 10^1$	annorlunda uttryckt	$\lg 10 = 1$

Enligt uppgiften krävs ett motiv. Finns det någon möjlighet att $\lg 9 \geq 1$? Är funktionen $y = 10^x$

strikt växande? Ger ett större x också ett större y ?

Enligt FORMELSAMLINGEN gäller

Derivator	Funktion	Derivata
	x^n där n är ett reellt tal	nx^{n-1}
	<u>a^x ($a > 0$)</u>	<u>$a^x \ln a$</u>

$$y' = 10^x \cdot \ln 10 > 0.$$

Funktionen $y = 10^x$ är alltså strikt växande för alla x .

Svar $\lg 9 < 1$.

Kommentar Skolverkets rättningsnorm för denna uppgift finns på de följande sidorna 9 och 10.

8.

Max 1/1/□

Korrekt svar ($\lg 9 < 1$) med försök till motivering, t ex genom att hänvisa till att $\lg 10 = 1$

+1 g

med godtagbar motivering, t ex genom att försöka påvisa att funktionen är växande genom att ange värden för några olika logaritmer

+1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda generell metod: Eleven styrker att $\lg 9 < 1$ med ett generellt resonemang, t ex genom att hävda att $y = \lg x$ är en växande funktion.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	genomföra bevis: Eleven gör t ex en omskrivning med hjälp av definitionen och kan därigenom diskutera värdet av $\lg 9$ på ett obestriddigt sätt.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Exempel på elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

Elevlösning 1 (1 g och 1 vg)

$$\lg 1 = 0 \quad \lg 10 = 1 \quad 0 < \lg 9 < 1$$

Kommentar: Eleven försöker, med några specialfall, påvisa att funktionen är växande. Elevlösningen är knapphändig, vilket gör att kvaliteten i elevlösningen bedöms vara precis över gränsen för erhållande av 1 g och 1 vg-poäng.

Elevlösning 2 (1 g och 1 vg och en av MVG-kvaliteterna)

Mindre än 1 eftersom den logaritmiska kurvan
är växande mellan $\lg 1$ och $\lg 10$ och $\lg 10 = 1$ och
 $\lg 1 = 0$

Kommentar: Eleven hävdar att $y = \lg x$ är växande i ett intervall och försöker därmed, på ett generellt plan, förklara varför $\lg 9 < 1$. Elevlösningen uppvisar 1 MVG-kvalitet.

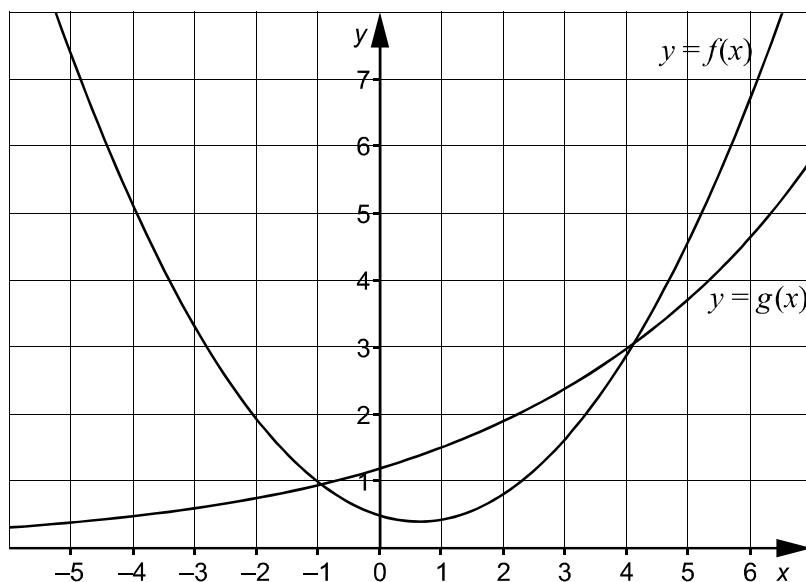
Elevlösning 3 (1 g och 1 vg och två av MVG-kvaliteterna)

$\lg 9$ betyder 10 upphöjt i vada är 9
Alltså: $10^x = 9$
Vi vet att: $10^1 = 10$
Därför borde $\lg 9$ eller x vara mindre än 1

Kommentar: Eleven använder definitionen för att övergå till värden som lätt kan rangordnas i storlek. Lösningen är generell och har karaktären av ett bevis. Den uppvisar två MVG-kvaliteter.

Del I # 9 (1/1) Lika lutning hos grafer

9. Figuren visar graferna till $y = f(x)$ och $y = g(x)$

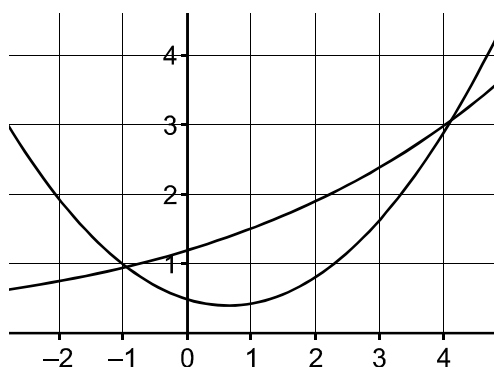


För vilket eller vilka x gäller att $f'(x) = g'(x)$?

Motivera ditt svar med text och/eller genom att rita en figur.

(1/1)

Vi ska alltså finna det x -värde där $f(x)$ och $g(x)$ har samma lutning.



Det gäller att $g'(-1)$ är positiv och $f'(-1)$ negativ, alltså är $g'(-1) > f'(-1)$. I punkten $x = 4$ är det tvärtom, $g'(4) < f'(4)$. Någonstans i intervallet $[-1, 4]$ måste derivatorna vara lika. Det är svårt att avgöra exakt var. För $x \approx 1,5$ ser lutningarna ut att vara lika.

Svar För $x \approx 1,5$ ser det ut som derivatorna är lika.

Del I # 10 (0/1/⊗) Ett bevis

10. Visa att $f'(x) \geq 0$ för alla x om $f(x) = Ax^5 + Bx^3$ och A och B är positiva konstanter.

(0/1/⊗)

Givet

$$f(x) = A \cdot x^5 + B \cdot x^3$$

då blir

$$f'(x) = \underbrace{A \cdot 5}_{>0} \cdot x^4 + \underbrace{B \cdot 3}_{>0} \cdot x^2.$$

Det gäller att

$$x^2 = \begin{cases} x^2 > 0 & : & x \neq 0 \\ x^2 = 0 & : & x = 0. \end{cases}$$

Produkten av positiva tal är positiv och summan av positiva tal är positiv. Produkt med faktorn 0 blir 0. För alla x gäller då

$$f'(x) = \underbrace{(A \cdot 5 \cdot x^2 + B \cdot 3)}_{>0} \cdot \underbrace{x^2}_{\geq 0} \geq 0$$

vilket skulle visas.

Del II # 11 (3/0) Geometrisk summa

Ma3b

11. En viss geometrisk summa kan beräknas med $\frac{4000 \cdot (1,03^5 - 1)}{1,03 - 1}$
- a) Skriv ut termerna i den geometriska summa som kan beräknas med uttrycket ovan. (2/0)
- b) Formulera ett problem som handlar om en verklig situation. Ditt problem ska kunna lösas genom att beräkna uttrycket $\frac{4000 \cdot (1,03^5 - 1)}{1,03 - 1}$ (1/0)

Använd FORMELSAMLINGEN.

**Geometrisk
summa**

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1} \quad \text{där } k \neq 1$$

Notera hur $n - 1$ och n förekommer i formeln för summa av geometrisk serie. Termerna blir

$$\frac{4000 \cdot (1,03^5 - 1)}{1,03 - 1} = 4000 + 4000 \cdot 1,03 + 4000 \cdot 1,03^2 + 4000 \cdot 1,03^3 + 4000 \cdot 1,03^4.$$

Svar a) Termerna är 4000; $4000 \cdot 1,03$; $4000 \cdot 1,03^2$; $4000 \cdot 1,03^3$; $4000 \cdot 1,03^4$.

Svar b) Hur mycket pengar blir det om man sparar 4 000:-/år under 5 år? Räntan är 3%.

Del II # 12 (2/1) Beräkna maximum

12. Fältforskningsenheten vid Sveriges Lantbruksuniversitet har undersökt hur mängden kväve i konstgödsel påverkar skördens storlek för olika kornsorter.

För kornsorten Baronesse gäller funktionen

$$f(x) = 0,002x^3 - 0,81x^2 + 105,6x + 1600 \quad 0 \leq x \leq 180$$

där $f(x)$ är skördens storlek i kg/hektar och x är mängden tillsatt kväve i kg/hektar.

Hur mycket kväve ska tillsättas för att skördens storlek ska bli maximal? (2/1)

För att finna extremvärden undersöker vi var $f'(x) = 0$. Derivera $f(x)$.

$$f'(x) = 0,002 \cdot 3x^2 - 0,81 \cdot 2x + 105,6$$

Lös

$$0 = \underbrace{0,002 \cdot 3}_{0,006} x^2 - 0,81 \cdot 2x + 105,6$$

Normalisera ekvation, alltså dividera med 0,006. Vi får

$$0 = x^2 - 270x + 17600.$$

Använd pq-formeln (den står i FORMELSAMLINGEN).

$$x_1 = 135 + \sqrt{135^2 - 17600} = 135 + \sqrt{625} = 135 + 25 = 160$$

$$x_2 = 135 - \sqrt{135^2 - 17600} = 135 - \sqrt{625} = 135 - 25 = 110$$

Vi konstaterar att både $x_1 = 160$ och $x_2 = 110$ ligger i intervallet $0 < x < 180$.

$$f'(x) = 0,006 \cdot (x - 110)(x - 160)$$

Gör en teckentabell och studera även gränserna.

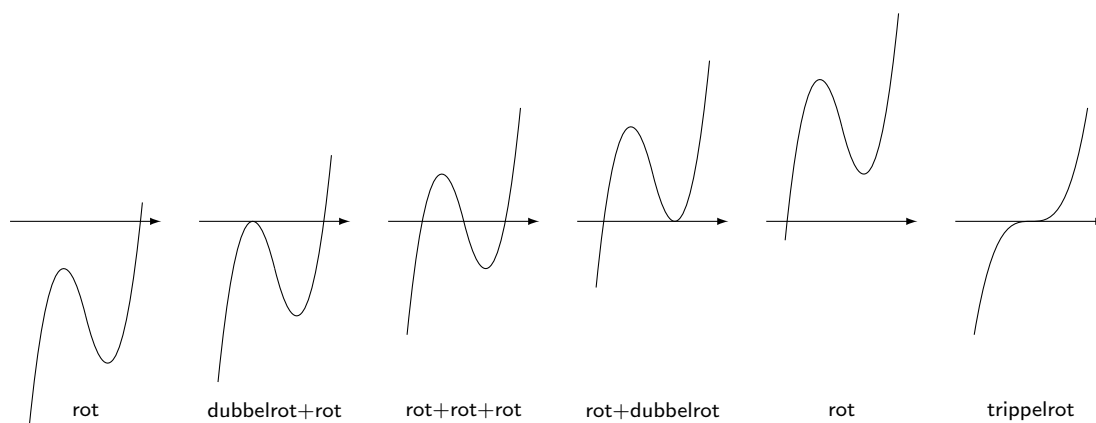
	$x = 0$	$0 < x < 110$	$x = 110$	$110 < x < 160$	$x = 160$	$160 < x < 180$	$x = 180$
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	1600	↗	6066	↘	5936	↗	6010

Svar En tillsats av konstgödsel med 110 kg/hektar ger maximal skörd.

Del II # 13 (2/0) Grafitande miniräknare

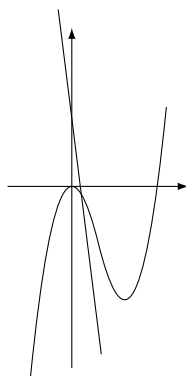
- 13.** Anders har fått en grafitande miniräknare. Förklara för Anders hur han ska göra för att lösa ekvationen $x^3 - 6x^2 = 1 - 9x$ med sin grafitande miniräknare. (2/0)

Anders bör använda matematisk kunskap i kombination med sin grafitande miniräknare. En tredjegrads ekvation har alltid minst en rot och högst tre rötter. Följande olika fall finns.



Ekvationen Anders ska lösa är $x^3 - 6x^2 = 1 - 9x$. En variant är att göra en grov skiss av $y(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ exempelvis i intervallet $[-10, 10]$ för att kunna avgöra hur många rötter som finns och var dessa rötter approximativt ligger. Rötterna ligger där grafen skär y-axeln. Sedan kan Anders zooma in och plotta grafen kring roten (eller rötterna).

En annan variant är att Anders ritar vänsterledet $g(x) = x^3 - 6x^2$ och högerledet $h(x) = 1 - 9x$ och tittar efter skärningspunkter. Se figuren nedan.



Kommentar Notera vad frågan gäller, alltså förklara för Anders. Du ska alltså inte beräkna roten (det finns bara en rot i detta problem) utan bara förklara för Anders.

Del II # 14 (0/2) Exponentialfunktionen

Ma2

- 14.** I början av år 2000 köpte Karin andelar i en IT-fond till ett värde av 3000 kr. Fem år senare hade värdet gått ner till 1712 kr.

Beräkna den årliga procentuella värdeminskningen för hennes fondandelar. (0/2)

Använd FORMELSAMLINGEN.

Potensfunktioner

$$y = C \cdot x^a$$

Exponentialfunktioner

$$y = C \cdot a^x \quad a > 0 \text{ och } a \neq 1$$

$$1712 = 3000 \cdot a^5$$

$$\underbrace{\frac{1712}{3000}}_{0,5707} = a^5$$

$$a = \sqrt[5]{0,5707} = 5^{0,2} = 0,89$$

Delen är $0,89 - 1 = -0,11$ vilket ger att minskningen är 11%

Svar Årliga minskningen är 11%

Del II # 15 (3/2/⊗) Formler i sjukamp

15. Carolina Klüft tävlar i sjukamp och är en av Sveriges främsta medaljkandidater i världsmästerskapen i friidrott 2005.

I sjukamp tävlar deltagarna i olika grenar. För att kunna summera resultaten från dessa grenar räknas resultatet i varje gren om till poäng.

Internationella friidrottsförbundet (IAAF) har bestämt de två formler som används för poängberäkning.

För löpgrenar används:

$$\text{Poäng} = a \cdot (b - M)^c$$

För kast- och hoppgrenar används:

$$\text{Poäng} = a \cdot (M - b)^c$$



Förklaring:

M = Uppmätt resultat (löpning i sekunder, hopp i centimeter, kast i meter)

a , b , c = konstanter, se tabellen nedan (b är det sämsta resultat som ger poäng)

Gren	Konstanter		
	a	b	c
200 m	4,99087	42,5	1,81
800 m	0,11193	254	1,88
100 m häck	9,23076	26,7	1,835
Höjdhopp	1,84523	75	1,348
Längdhopp	0,188807	210	1,41
Kula	56,0211	1,5	1,05
Spjut	15,9803	3,8	

- a) Det svenska rekordet i längdhopp för damer är 699 cm. Hur många poäng får Carolina om hon hoppar så långt i en sjukamp? (1/0)
- b) Värdet på konstanten c för spjutkastning har fallit bort i tabellen. Bestäm c om du vet att ett kast på 48 meter ger 822 poäng. (1/0)
- c) Vid OS i Aten 2004 hade Carolina 6047 poäng inför sista grenen som var 800 m. Vilken tid hade hon behövt springa på för att slå det då gällande europarekordet 7009 poäng? (1/1)
- d) Varför används två olika formler? (0/1/⊗)

a) Längdhopp

Formeln för kast- och hoppgrenar är

$$\text{Poäng} = a \cdot (M - b)^c$$

där parametrarna är $a = 0,188807$, $b = 210$ och $c = 1,41$ och M är hoppets längd i cm.

Ett hopp på 699 cm ger

$$\text{Poäng} = 0,188807 \cdot (699 - 210)^{1,41} = 1169$$

Svar 1169 poäng.

b) Spjut

Formeln för kast- och hoppgrenar är

$$\text{Poäng} = a \cdot (M - b)^c$$

där parametrarna är $a = 15,9803$, $b = 3,8$ och c ska beräknas. Ett kast $M = 48$ m ger 822 poäng.

$$822 = 15,9803 \cdot \underbrace{(48 - 3,8)}_{44,2}^c$$

$$\underbrace{\frac{822}{15,9803}}_{51,4383} = 44,2^c$$

Logaritmera. Räkner regler för logaritmer finns i FORMELSAMLINGEN. Det går bra både med 10- eller e-logaritmer.

$$\underbrace{\lg 51,4383}_{1,7113} = c \cdot \underbrace{\lg 44,2}_{1,6454}$$

$$c = 1,04$$

Svar $c = 1,04$.

c) Löpning

Formeln för löpgrenar är

$$\text{Poäng} = a \cdot (b - M)^c$$

där parametrarna för 800 meter är $a = 0,11193$, $b = 254$ och $c = 1,88$. Hon saknar $7009 - 6047 = 962$ poäng och behöver tiden M för att tangera rekordet.

$$962 = 0,11193 \cdot \underbrace{(254 - M)}_x^{1,88}$$

$$\underbrace{\frac{962}{0,11193}}_{8594,66} = x^{1,88}$$

Logaritmera. Räknerregler för logaritmer finns i FORMELSAMLINGEN. Det går bra både med 10- eller e-logaritmer.

$$\underbrace{\lg 8594,66}_{3,9342} = 1,88 \cdot \lg x$$

$$\lg x = \frac{3,9342}{1,88} = 2,0927$$

$$x = 10^{\lg x} = 10^{2,0927} = 123,79$$

$$M = 254 - x = 254 - 123,79 = 130,21$$

Svar Hon hade behövt springa snabbare än 130,21 sekunder.

d) Varför används två olika formler?

I rättningsnormen står det

Godtagbar förklaring, t ex "I löpning ska formeln fungera så att den ger fler poäng åt mindre M, i kast mm ska det vara tvärtom." +1vg

Svaret är korrekt men uttrycker inte hela sanningen. Svaret ger intrycket att om man tillämpar formeln för kastgrenar på löpning så skulle konsekvensen bli minskande poäng. Så är det inte. Låt oss undersöka saken. Formeln för kastgrenar är

$$\text{Poäng} = a \cdot (M - b)^c$$

Använd parametrar för 800 meter och tiden 130 sekunder och formeln för kastgrenar. Vi får då

$$\text{Poäng} = 0,11193 \cdot (130 - 254)^{1,88} = 0,11193 \cdot (\underbrace{-124}_{\text{negativt}})^{1,88}$$

Vad menas med $(-124)^{1,88}$? För att få ett reellt tal (vanligt tal) måste talet innanför parentesen vara positivt. Med matematik bortom gymnasiets kurser kan uttryck av typen $(-124)^{1,88}$ beräknas men resultatet blir inte meningsfullt i detta sammanhang.

Del II # 16 (2/1/⊗) Derivering på olika sätt

16. I denna uppgift ska du bestämma derivatans värde till $f(x) = x^2 + 3$ i den punkt på kurvan där $x = 4$

- a) Lös uppgiften med hjälp av deriveringsregler. (1/0)
- b) Lös uppgiften med hjälp av lämplig ändringskvot. (1/0)
- c) Lös uppgiften med hjälp av derivatans definition. (0/1/⊗)

a) Lös uppgiften med hjälp av deriveringsregler

Använd FORMELSAMLINGEN.

Derivator	Funktion	Derivata
	x^n där n är ett reellt tal	nx^{n-1}

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$$

b) Lös uppgiften med hjälp av lämplig ändringskvot

Ändringskvoten är

$$f'(4) \approx \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

välj lämpligt värde på steget h . Med $h = 0,1$ får vi

$$f'(4) \approx \frac{f(4+0,1) - f(4)}{0,1} = \frac{(4,1^2 + 3) - (4^2 + 3)}{0,1} = \underbrace{\frac{(16,81 + 3) - (16 + 3)}{0,1}}_{\frac{0,81}{0,1} = 8,1}$$

$$f'(4) \approx 8,1$$

c) Lös uppgiften med hjälp av derivatans definition

Använd FORMELSAMLINGEN.

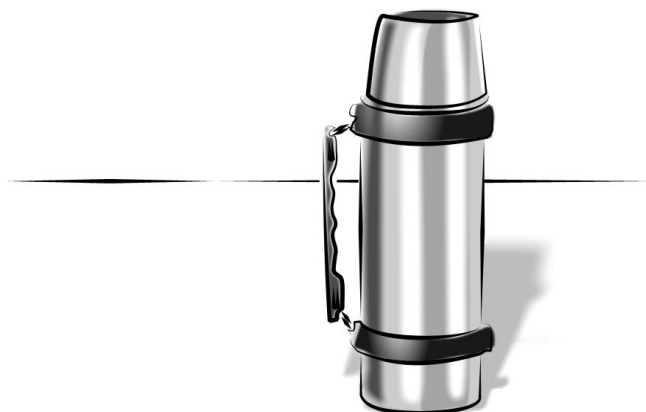
Derivatans definition $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Enligt derivatans definition gäller

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\ f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(4+h)^2 + 3] - [4^2 + 3]}{h} \\ f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[4^2 + 8h + h^2 + 3] - [4^2 + 3]}{h} \\ f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [8 + h] = 8 \end{aligned}$$

Del II # 17 (0/4/⊗) Exponentiell avsvälning

17. En termos fylls med hett kaffe och placeras direkt utomhus där temperaturen ligger kring noll grader. Temperaturen på kaffet avtar exponentiellt med tiden.



Efter 4 timmar är temperaturen 76 °C och vid samma tidpunkt minskar temperaturen med hastigheten 4,1 °C per timme.

- a) Vilken var temperaturen på kaffet då det hällades i termosen? (0/3/⊗)
- b) Kaffet anses drickbart så länge dess temperatur inte understiger 55 °C. Hur lång tid efter att man hållt kaffet i termosen är det fortfarande drickbart? (0/1)

- a) Vilken var temperaturen på kaffet då det hällades i termosen?

Använd FORMELSAMLINGEN.

Potensfunktioner	Exponentialfunktioner
$y = C \cdot x^a$	$y = C \cdot a^x$ $a > 0$ och $a \neq 1$

Vid tidpunkten x är temperaturen

$$y(x) = C \cdot a^x$$

där C och a är parametrar. Bestäm C och a . Givet är

$$y(4) = 76$$

och

$$y'(4) = -4,1$$

där minustecknet i $-4,1$ kommer från att temperaturen *minskar*. Använd FORMELSAMLINGEN igen och derivera

$$y(x) = C \cdot a^x.$$

Derivator	Funktion	Derivata
	x^n där n är ett reellt tal	nx^{n-1}
	a^x ($a > 0$)	$a^x \ln a$

Vi får

$$y'(x) = C \cdot a^x \cdot \ln a$$

vilket ger två ekvationer med parametrar C och a som obekanta.

$$76 = C \cdot a^4$$

$$-4,1 = C \cdot a^4 \cdot \ln a$$

Division av andra ekvationen med första ekvationen ger

$$\frac{-4,1}{76} = \frac{C \cdot a^4 \cdot \ln a}{C \cdot a^4} = \ln a.$$

Räkneregler för logaritmer finns i FORMELSAMLINGEN. Använd miniräknare för att få numeriska värden.

Logaritmer	$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$	<u>$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$</u>	
	$\lg x + \lg y = \lg xy$	$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$	$\lg x^p = p \cdot \lg x$

$$a = e^{\ln a}$$

$$a = e^{\frac{-4,1}{76}} = 0,9475$$

$$C = \frac{76}{a^4} = 94,3$$

Vi har nu temperaturen y som funktion av tiden x

$$y(x) = 94,3 \cdot 0,9475^x.$$

Kaffet hälldes i termosen då $x = 0$ vilket ger

$$y(0) = 94,3 \cdot \underbrace{0,9475^0}_1 = 94,3.$$

Svar a) Kaffets begynnelsestemperatur var 94°C .

b) När når kaffet 55 °C?

Lös ekvationen

$$55 = 94,3 \cdot 0,9475^x.$$

Detta är en exponentialekvation då det sökta x är exponent till basen 0,9475. För att lösa exponentialekvationer logariterar vi ekvationen. Städa först, logaritmera därefter.

$$\lg\left(\frac{55}{94,3}\right) = \lg 0,9475^x$$

Använd räknereglererna för logaritmer för att flytta x från exponent till raden.

Logaritmer	$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$	$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$	
	$\lg x + \lg y = \lg xy$	$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$	<u>$\lg x^p = p \cdot \lg x$</u>

$$\underbrace{\lg\left(\frac{55}{94,3}\right)}_{-0,23417} = x \underbrace{\lg 0,9475}_{-0,023429}$$

$$x = \frac{-0,23417}{-0,023429} = 9,9947 \approx 10$$

Svar b) Efter 10 timmar är temperaturen 55 °C.

Kommentar

Olika varianter av denna uppgift förekommer i gymnasiets matematikkurser. Därför är detta en viktig uppgift. Från praktisk synpunkt är den här aktuella formuleringen av uppgiften konstig. Det går enkelt att mäta temperaturen vid olika tidpunkter men det går inte att mäta *vid samma tidpunkt minskar temperaturen med hastigheten 4,1 °C per timme*. Om man vill veta derivatan så får man mäta temperaturen vid olika tidpunkter och därefter bestämma en modell av typen $y = C \cdot a^x$. Från modellen kan derivatan sedan uppskattas. Att uppskatta derivatan ur mätdata som är behäftade med mätfel är ett svårt problem.

Del II # 18 (3/4/⊗) Volymoptimering av paket

18. Micke och Peter har startat ett företag inom Ungt Företagande (UF). De säljer tröjor med trycket "Mmm ... matematik" och har kunder i alla delar av landet. Därför tänker de skicka tröjorna med posten. För att ta reda på vad som gäller för att skicka paketen går de in på Postens hemsida. Där hittar de en måttguide som innehåller informationen nedan:

Längd + bredd + bredd + höjd + höjd får vara max 200 cm

Längd: max 150 cm

Bredd: max 70 cm

Höjd: max 115 cm

De vill skicka tröjorna i paket som har så stor volym som möjligt, utan att överskrida Postens maximimått.

Micke tror att ett kubiskt paket ger störst volym. Peter tror att volymen blir ännu större om paketet inte har formen av en kub, men bredd och höjd är lika.



- Vilken av de två typerna av paket ger största möjliga volym?
- Är samma typ av paket störst om begränsningen 200 cm ändras?

(3/4/⊗)

Vi ska undersöka två sorters paket, en kub och ett rätblock med kvadratisk bas. Vi har följande begränsningar på paketen:

Längd + bredd + bredd + höjd + höjd får vara max 200 cm	
Längd:	max 150 cm
Bredd:	max 70 cm
Höjd:	max 115 cm

Vi har två frågor

- Vilken av de två typerna av paket ger största möjliga volym?
- Är samma typ av paket störst om begränsningen 200 cm ändras?

Inför följande beteckningar

L längd

B bredd

H höjd

Det gäller givetvis att $L > 0$, $B > 0$ och $H > 0$.

Kuben

I det kubiska fallet gäller att $L = B = H = a$. De givna begränsningarna är

$$a + a + a + a + a \leq 200$$

$$a \leq 150$$

$$a \leq 70$$

$$a \leq 115$$

Sammantaget betyder detta att

$$a \leq 40$$

Maximal volym $V_{\text{kub}}^{\text{max}}$ erhålles då $a = 40$

$$V_{\text{kub}}^{\text{max}} = 40^3 = 64\,000$$

Rätblocket

I detta fall gäller att $B = H = x$. De givna begränsningarna är

$$\begin{aligned} L + x + x + x + x &\leq 200 \\ 0 &\leq L \leq 150 \\ 0 &\leq x \leq 70 \\ 0 &\leq x \leq 115 \end{aligned}$$

Detta betyder att volymen blir

$$V_{\text{rätblock}} = L \cdot x \cdot x$$

Undersök funktionen $V_{\text{rätblock}}(x)$. Det gäller att

$$L = 200 - 4x$$

då blir

$$V_{\text{rätblock}}(x) = (200 - 4x)x^2 = 200x^2 - 4x^3$$

Derivera

$$V'_{\text{rätblock}}(x) = 200 \cdot 2x - 4 \cdot 3x^2 = 400x - 12x^2 = (400 - 12x) \cdot x$$

För att finna extremvärden löser vi ekvationen $V'_{\text{rätblock}}(x) = 0$

$$0 = \underbrace{(400 - 12x)}_{x=\frac{100}{3}} \cdot \underbrace{x}_{x=0}$$

Roten $x = 0$ ger uppenbarligen minimal volym noll. Den andra roten

$$x = \frac{1}{3} 100$$

ger

$$L = \frac{2}{3} 100$$

$$V\left(\frac{100}{3}\right) = 200 \cdot \left(\frac{100}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{100}{3}\right)^3 = \frac{2}{27} 10^6 \approx 74\,000$$

Både $x = \frac{100}{3}$ (alltså H och B) samt $L = \frac{200}{3}$ ligger inom de givna begränsningarna. Gör en teckentabell.

	$x = 0$	$0 < x < \frac{100}{3}$	$x = \frac{100}{3}$	$\frac{100}{3} < x < 50$	$x = 50$
$V'_{\text{rätblock}}$	0	+	0	−	−
$V_{\text{rätblock}}$	0	↗	$\frac{2 \cdot 10^6}{27}$	↘	0

$x = \frac{100}{3}$ ger maximal volym $V_{\text{rätblock}}^{\max} = \frac{2 \cdot 10^6}{27} \approx 74\,000$. Notera att $x > 50$ inte är möjligt då det ger negativt L och därmed negativ volym. (Negativa x är inte tillåtna. Med negativa x kan vi få oändlig volym eftersom när $x \rightarrow -\infty$ så $L \rightarrow \infty$ och $V \rightarrow \infty$.)

Jämförelse

Rätblocket ger största volymen.

Ändrad begränsning

Byt gränsen 200 mot Z i resonemanget ovan och studera vad som händer. Vi får då

$$V_{\text{kub}} = \left(\frac{Z}{5}\right)^3 = \frac{Z^3}{125}$$

För $V_{\text{rätblock}}$ gäller

$$V_{\text{rätblock}}(x) = (Z - 4x)x^2 = Zx^2 - 4x^3$$

$$V'_{\text{rätblock}}(x) = Z \cdot 2x - 4 \cdot 3x^2 = Z \cdot 2x - 12x^2 = 2x \cdot \underbrace{(Z - 6x)}_{x=\frac{Z}{6}}$$

Den intressanta roten till $V'_{\text{rätblock}}(x) = 0$ är $x = \frac{Z}{6}$ som ger

$$V_{\text{rätblock}}^{\max} = \left(Z - 4 \cdot \frac{Z}{6}\right) \cdot \left(\frac{Z}{6}\right)^2 = \frac{Z^3}{108}$$

Studera de övriga gränserna

$$V_{\text{kub}}^{\max} = \begin{cases} \frac{Z^3}{125} & : & x < 70 \\ 70^3 = 343\,000 & : & 70 \leq x \end{cases}$$

$$V_{\text{rätblock}}^{\max} = \begin{cases} \frac{Z^3}{108} & : & x < 70 \\ x \cdot 70^2 & : & 70 \leq x < 150 \\ 150 \cdot 70^2 = 735\,000 & : & 150 \leq x \end{cases}$$

Jämförelse

Rätblocket ger största volymen oberoende av hur gränsen 200 ändras.