

Innehåll

Förord	2
Förslag på lösningar till uppgifter utan miniräknare	3
Del I # 1 (3/0) Derivera	3
Del I # 2 (2/0) Ränta	4
Del I # 3 (2/0) Exakt lösning	5
Del I # 4 (1/1) Antal nollställen	5
Del I # 5 (3/1) Maximum	6
Del I # 6 (3/1) En rationell funktion	8
Del I # 7 (0/2/⊗) Handskakning	9
Del I # 8 (0/2/⊗) Växande funktion då $x > a$	10
Förslag på lösningar till uppgifter med miniräknare	11
Del II # 9 (2/0) Samband vikt - längd för barn	11
Del II # 10 (2/0) Ändringskvot	13
Del II # 11 (2/0) Tangenter	14
Del II # 12 (1/1) Funktioner	14
Del II # 13 (0/2) Exponentiell prisökning	15
Del II # 14 (0/2) Antal tangenter	16
Del II # 15 (0/2) Funktion och derivata	17
Del II # 16 (0/1) Två funktioner	18
Del II # 17 (0/2/⊗) Tredjegradspolynom	19
Del II # 18 (2/5/⊗) Medicin, koncentration i blodet	21

Förord

Uppgifter till kursen Matematik C duger utmärkt för träning till kurser enligt Gy 2011. Denna version av lösningarna refererar till den **FORMELSAMLING** som hör till kursen Matematik 3.

Kom ihåg

- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan

- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Del I # 1 (3/0) Derivera**1. Derivera**

a) $f(x) = x^5 - 12x$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $f(x) = 10$ *Endast svar fordras* (1/0)

c) $f(x) = (3x)^2$ *Endast svar fordras* (1/0)

Använd FORMELSAMLINGEN

Derivator	Funktion	Derivata
	x^n där n är ett reellt tal	nx^{n-1}

a) **Derivera** $f(x) = x^5 - 12x$

derivatan blir

$$f'(x) = 5 \cdot x^4 - 12$$

Svar a) $f'(x) = 5x^4 - 12$

b) **Derivera** $f(x) = 10$

Detta är den enda (vanliga) funktion som inte uttryckligen finns i FORMELSAMLINGEN. Derivatan av en konstant är noll.

$$f'(x) = 0$$

Svar b) $f'(x) = 0$

c) **Derivera** $f(x) = (3x)^2$

Förenkla först $f(x)$ och använd sedan FORMELSAMLINGEN

$$f(x) = (3x)^2 = 9x^2$$

$$f'(x) = 9 \cdot 2x = 18x$$

Svar c) $f'(x) = 18x$

Del I # 2 (2/0) Ränta

2. Matilda har i slutet av varje år satt in pengar på ett konto med fast räntesats. Hon tecknar ett uttryck som visar hur mycket hon har på kontot (i kronor) omedelbart efter den sista insättningen:

$$\frac{1000(1,02^6 - 1)}{1,02 - 1}$$

- a) Vilken räntesats har hon fått på sitt sparande? *Endast svar fordras* (1/0)
- b) Hur många insättningar har Matilda gjort? *Endast svar fordras* (1/0)

Delfråga a.) I FORMELSAMLINGEN finns formeln för geometrisk summa.

**Geometrisk
summa**

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1} \quad \text{där } k \neq 1$$

I problemet är 1,02 förändringsfaktor. Räntan är 2%.

Svar a) 2%

Delfråga b.) Notera hur $n - 1$ och n förekommer i formeln för geometrisk summa. Med $n = 6$ i formeln för geometrisk summa får vi följande summa med 6 termer.

$$\frac{a(k^6 - 1)}{k - 1} = \underbrace{a}_{\substack{6:e \\ \text{insättningen} \\ \text{ränta i 0 år}}} + \underbrace{a \cdot k}_{\substack{5:e \\ \text{insättningen}}} + \underbrace{a \cdot k^2}_{\substack{4:e \\ \text{insättningen}}} + \underbrace{a \cdot k^3}_{\substack{3:e \\ \text{insättningen}}} + \underbrace{a \cdot k^4}_{\substack{2:a \\ \text{insättningen}}} + \underbrace{a \cdot k^5}_{\substack{1:a \\ \text{insättningen} \\ \text{ränta i 5 år}}}$$

Svar b) 6 insättningar

Del I # 3 (2/0) Exakt lösning**3.** Lös ekvationerna och svara exakt

a) $x^5 = 25$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $e^x = 25$ *Endast svar fordras* (1/0)

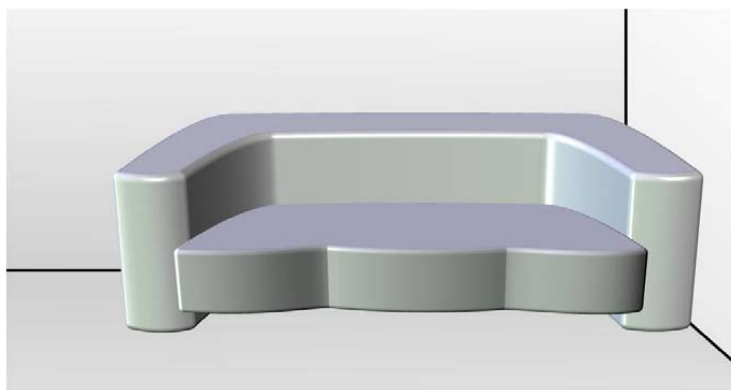
Svar a) $x = \sqrt[5]{25}$ alternativt $x = 25^{0,2}$ **Svar b)** $x = \ln 25$ "svaret" står i FORMELSAMLINGEN**Del I # 4 (1/1) Antal nollställen****4.** Bestäm antalet (reella) nollställen till funktionen f där $f(x) = x^3 + 100x$ (1/1)Börja med att faktorisera $f(x)$, alltså att dela upp $f(x)$ i olika faktorer

$$f(x) = x^3 + 100x = \underbrace{x}_{1:a \text{ faktorn}} \cdot \underbrace{(x^2 + 100)}_{2:a \text{ faktorn}}$$

1:a faktorn ger att $f(x) = 0$ då $x = 0$. Detta är ett nollställe.2:a faktorn kan aldrig bli noll då $(x^2 + 100) \geq 100$ **Svar** Funktionen har ett (reellt) nollställe.

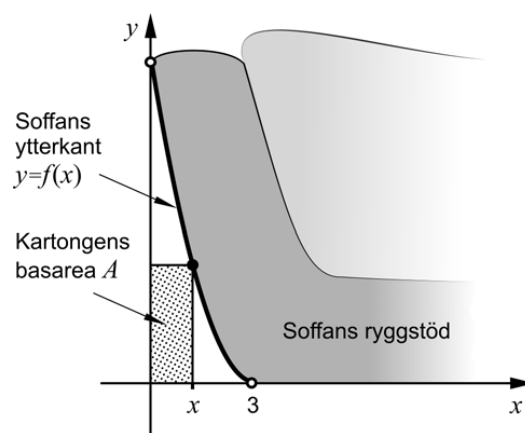
Del I # 5 (3/1) Maximum ...

5. Vid transport av varor används ofta containrar. För att utnyttja utrymmet i containern maximalt packas varorna så tätt som möjligt. Soffan "Torulf" ska fraktas i en container där den placeras i ett hörn av containern, se figur 1.



Figur 1. Soffan stående i containern

I utrymmet som uppstår mellan hörnet och soffan kan en kartong placeras. Kartongen har formen av ett rätblock. För att ta reda på vilka mått kartongen kan ha räcker det med att undersöka dess basarea, se figur 2.



Figur 2. Soffan sedd uppifrån.

Basarean $A \text{ dm}^2$ kan beskrivas med $A(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ där $x \text{ dm}$ är kartongens bredd, se figur 2.

- a) För vilket värde på x blir basarean hos kartongen maximal? (3/0)

I figur 2 är soffans ytterkant mot containerns hörn markerat med den kraftigare svarta linjen. Soffans ytterkant beskrivs av funktionen f där $y = f(x)$

- b) Bestäm det funktionsuttryck $y = f(x)$ som beskriver soffans ytterkant. (0/1)

a) För vilket värde på x blir basarean hos kartongen maximal?

Arean ges av

$$A(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Derivera $A(x)$ och bestäm det x som ger maximum.

Använd FORMELSAMLINGEN

$$A'(x) = 3x^2 - 6 \cdot 2x + 9 = 3x^2 - 12x + 9$$

Bestäm rötterna till $A'(x) = 0$. Skriv först om ekvationen så att den stämmer överens med FORMELSAMLINGENS pq-formel. Alltså dividera med 3. Då får vi:

$$0 = x^2 \underbrace{-4}_{p=-4} x + \underbrace{3}_{q=3}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 3} = 2 \pm 1$$

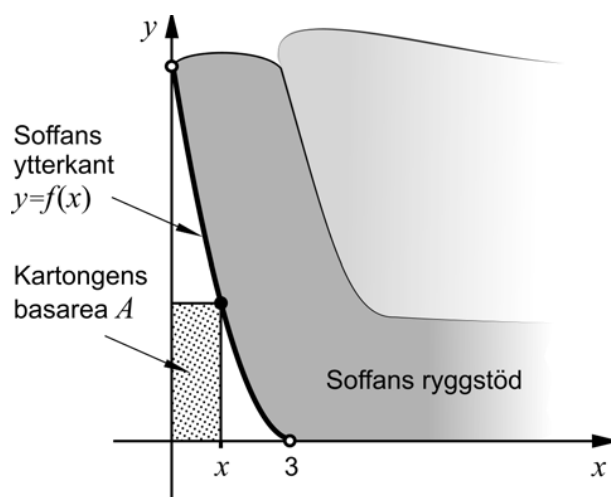
Vilken av rötterna ska vi välja? Det är uppenbart att de båda randpunkterna $x = 0$ och $x = 3$ ger arean noll. Roten $x_1 = 3$ ger $A(3) = 0$ vilket stämmer med problemets figur. Roten $x_2 = 1$ är en punkt mellan randpunkterna och ger $A(1) = 4$ som är maximum.

Svar a) $x = 1$ ger maximal area $A(1) = 4$.

b) Bestäm det funktionsuttryck $y = f(x)$ som beskriver soffans ytterkant.

Enligt problemets figur gäller att $A = x \cdot y$ vilket ger

$$y = \frac{A(x)}{x} = x^2 - 6x + 9.$$



Svar b) $y = x^2 - 6x + 9$

Del I # 6 (3/1) En rationell funktion

6.

- a) För vilka värden på x är uttrycket $\frac{4}{x-2} - \frac{8}{x(x-2)}$ inte definierat?
Endast svar fordras (1/0)
- b) Förenkla $\frac{4}{x-2} - \frac{8}{x(x-2)}$ så långt som möjligt. (2/0)
- c) Lös ekvationen $\frac{4}{x-2} - \frac{8}{x(x-2)} = 2$ (0/1)

Bakgrund: En funktion av typen $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom kallas rationell funktion. Med symbolspråket $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ menas att x avbildas på $\frac{p(x)}{q(x)}$. En rationell funktion är definierad för alla x för vilka $q(x) \neq 0$. Det får alltså inte stå 0 i nämnaren.

a) För uttrycket

$$\frac{4}{x-2} - \frac{8}{x(x-2)}$$

gäller att det blir problem om $x = 0$ eller $x = 2$.

Svar a) Uttrycket är inte definierat för $x = 0$ eller $x = 2$.

b) Förenkla genom att göra liknämning

$$\begin{aligned} \frac{4}{x-2} - \frac{8}{x(x-2)} &= \frac{x \cdot 4}{x(x-2)} - \frac{8}{x(x-2)} = \\ \frac{x \cdot 4 - 8}{x(x-2)} &= \frac{4(x-2)}{x(x-2)} = \frac{4}{x} \end{aligned}$$

Svar b) Förenklat blir uttrycket $\frac{4}{x}$

c) Lös ekvationen $\frac{4}{(x-2)} - \frac{8}{x(x-2)} = 2$. Förenklat blir detta

$$\frac{4}{x} = 2$$

som har lösningen $x = 2$. Varning ursprungliga ekvationens vänsterled $\frac{4}{(x-2)} - \frac{8}{x(x-2)}$ är inte definierat för $x = 2$. Ekvationen saknar alltså lösning.

Svar c) Ekvationen saknar lösning.

Del I # 7 (0/2/⊗) Handskakning

7. En grupp personer hälsar på varandra genom att skaka hand. Antalet handskakningar H i gruppen ges då av $H = \frac{n(n-1)}{2}$ där n är antalet personer.



Antag att en grupp A består av ett antal personer och en grupp B består av dubbelt så många personer som grupp A. Personerna i grupp A hälsar på varandra och personerna i grupp B hälsar på varandra.

Teckna ett uttryck för differensen mellan antalet handskakningar i de två grupperna. Förenkla sedan detta uttryck så långt som möjligt.

(0/2/⊗)

Antalet handskakningar i en grupp med n personer är

$$H_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Antalet handskakningar i en grupp med $2n$ personer blir då

$$H_{2n} = \frac{2n(2n-1)}{2}$$

Skillnaden blir

$$H_{2n} - H_n = \frac{2n(2n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}$$

Skolverket anser att detta visar MVG-kvalitet. *Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning.*

$$\begin{aligned}
&= \frac{4n^2 - 2n}{2} - \frac{n^2 - n}{2} \\
&= \frac{4n^2 - 2n - n^2 + n}{2} \\
&= \frac{3n^2 - n}{2}
\end{aligned}$$

Svar Skillnaden i antalet handskakningar är $\frac{3n^2 - n}{2}$.

Del I # 8 (0/2/⊗) Växande funktion då $x > a$

- 8.** Funktionen f har derivatan $f'(x) = (x-a)(x-b)^2$ där a och b är konstanter och $0 < a < b$

Undersök för vilka x funktionen f är växande.

(0/2/⊗)

$$f'(x) = (x-a)(x-b)^2$$

Det gäller att $0 < a < b$. Undersök för vilka x funktionen $f(x)$ är växande. Studera derivatans teckenväxling.

x	$x < a$	$x = a$	$a < x < b$	$x = b$	$b < x$
f'	−	0	+	0	+

Enligt läroboken gäller:

Om $f'(x) > 0$ för $a < x < b$, så växer f för $a < x < b$.

I vårt problem växer alltså funktionen $f(x)$ då $x > a$ men med punkten $x = b$ undantagen. Läroboken¹ ger ingen vägledning för hur punkterna $x = a$ och $x = b$ ska hanteras. Hur fall som detta hanteras varierar mellan olika läromedel. Skolverkets norm för rättning lämnar därför till läraren att bedöma.

Godkänt svar: Funktionen $f(x)$ växer för $a < x < b$ och $b < x$.

Kommentar: Punkten $x = b$ har teckenväxlingen $+0+$ och är därför en terrasspunkt av växande typ.

¹Matematik 3000 : matematik tretusen. Kurs C, [Lärobok] / Lars-Eric Björk, Hans Brolin, Kerstin Ekstig Stockholm : Natur och kultur, 2000 Svenska 222, [2] s.

Del II # 9 (2/0) Samband vikt - längd för barn

9. För barn mellan 5 år och 13 år finns en modell som ger sambandet mellan barnets vikt y kg och längd x m. Enligt denna modell är $y = 2,4 \cdot 10^{0,8x}$

Använd modellen och besvara följande frågor.

- a) Hur mycket väger ett barn som är 1,2 m? (1/0)
- b) Vilken längd har ett barn som väger 32 kg? (1/0)

- a) Hur mycket väger ett barn som är 1,2 m

Modellen är

$$y = 2,4 \cdot 10^{0,8x}$$

där y är vikt i kg och x är längd i m. Då $x = 1,2$ m blir

$$y = 2,4 \cdot 10^{0,8 \cdot 1,2} \text{ kg} = 22 \text{ kg}$$

Svar a) 22 kg

b) Vilken längd har ett barn som väger 32 kg?

Då $y = 32$ kg kan längden x beräknas ur lösningen till

$$32 = 2,4 \cdot 10^{0,8x}$$

Städa först

$$\frac{32}{2,4} = 10^{0,8x}$$

Använd FORMELSAMLINGEN.

Logaritmer

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$$

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$\lg x + \lg y = \lg xy$$

$$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$$

$$\lg x^p = p \cdot \lg x$$

Logaritmera (basen 10)

$$\lg \frac{32}{2,4} = 0,8x$$

$$x = \frac{1}{0,8} \lg \frac{32}{2,4}$$

$$x = 1,41 \text{ m} \approx 1,4 \text{ m}$$

(två siffror in $\rightarrow$ två siffror ut)

Svar b) 1,4 m

Del II # 10 (2/0) Ändringskvot

10. År 2001 blev det lag på att hundar i Sverige skall registreras. Sedan dess har antalet hundar i registret ökat för varje år. I tabellen nedan visas antalet registrerade hundar vid slutet av åren 2001-2006.

År	Antal hundar
2001	159 108
2002	221 560
2003	295 521
2004	338 203
2005	387 884
2006	452 676

Källa: Jordbruksverket



Beräkna den genomsnittliga ökningen av antalet registrerade hundar per år mellan år 2001 och år 2006. (2/0)

Om y beror på x så är den genomsnittliga förändringshastigheten

$$\frac{\text{förändringen över ett intervall}}{\text{intervallets längd}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kallas förändringshastigheten

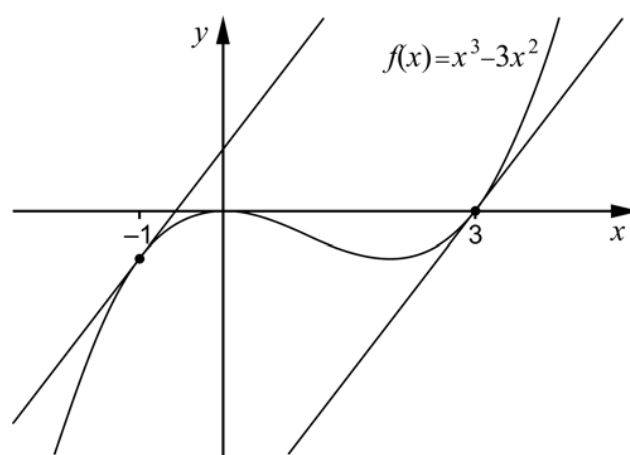
Beräkna genomsnittlig ökning för hundar mellan år 2001 och år 2006.

$$\text{genomsnittlig ökning} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{452\,676 - 159\,108}{2006 - 2001} \approx 58\,700 \frac{\text{hundar}}{\text{år}}$$

Svar Genomsnittlig ökning 58 700 hundar/år.

Del II # 11 (2/0) Tangenter

11. Figuren visar grafen till funktionen f där $f(x) = x^3 - 3x^2$.
I de punkter där x -koordinaterna är -1 respektive 3 är tangenter till kurvan ritade.



I figuren ser det ut som att tangenterna är parallella. Undersök om de är parallella. (2/0)

Funktionen

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

har derivatan

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Tangentens lutning ges av derivatan. Då $x = -1$ respektive $x = 3$ är lutningen

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 9$$

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 9$$

Svar Tangenterna är parallella.

Del II # 12 (1/1) Funktioner

12. Det finns flera funktioner för vilka det gäller att $f(0) = 20$ och $f'(0) = 20$.
Bestäm en sådan funktion.

(1/1)

Det finns många funktioner för vilket det gäller att $f(0) = 20$ och $f'(0) = 20$. Titta i FORMELSAMLINGEN. Två exempel är

$$f(x) = 20 + 20x$$

$$f(x) = 20e^x$$

Fler exempel

$$f(x) = 20 + 20x + x^3$$

$$f(x) = 20 + 20x + x^4$$

$$f(x) = 20e^x + x^5$$

$$f(x) = 20e^x + x^6$$

Det finns alltså många många många sådana funktioner.

Svar Se ovan.

Del II # 13 (0/2) Exponentiell prisökning

- 13.** Ett radhus i Umeå köptes år 2001 för 1,23 miljoner kronor. Sju år senare såldes radhuset för 2,49 miljoner kronor. Antag att prisökningen har varit exponentiell.

Beräkna den årliga procentuella prisökningen.

(0/2)

Använd FORMELSAMLINGEN.

Potensfunktioner

$$y = C \cdot x^a$$

Exponentialfunktioner

$$y = C \cdot a^x \quad a > 0 \text{ och } a \neq 1$$

Funktionen växer då $a > 1$ och minskar då $a < 1$. I vårt fall gäller:

$$2,49 = 1,23 a^7$$

Bestäm a . Städa först.

$$\frac{2,49}{1,23} = a^7$$

$$a = \sqrt[7]{\frac{2,49}{1,23}} = \left(\frac{2,49}{1,23}\right)^{1/7} = 1,1060$$

Ökningen är $1,106 - 1,000 = 0,106 = 10,6\%$

Svar Årliga ökningen är 10,6%

Del II # 14 (0/2) Antal tangenter

- 14.** För funktionen f gäller att $f(x) = x^4 - 420x^2 + 16x$
Hur många punkter på funktionens graf har en tangent med
riktningskoefficienten 16?

(0/2)

Tangenten i punkten $(x, f(x))$ till funktionen $f(x)$ har riktningskoefficienten $f'(x)$.
Funktionen

$$f(x) = x^4 - 420x^2 + 16x$$

har derivatan

$$f'(x) = 4x^3 - 840x + 16$$

De punkter där funktionens graf har riktningskoefficienten 16 uppfyller ekvationen

$$16 = 4x^3 - 840x + 16$$

$$0 = 4x^3 - 840x$$

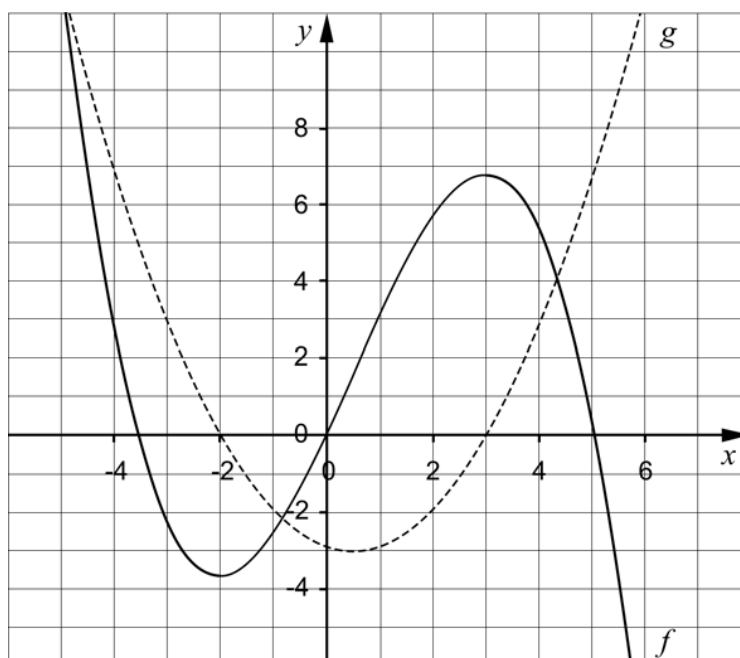
$$0 = 4 \cdot \underbrace{x}_{\text{en lösning}} \cdot \underbrace{(x^2 - 210)}_{\text{två lösningar}}$$

Svar Tre lösningar.

Kommentar: Ekvationen för tangenten till funktionen $f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ är
 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Frågan i uppgiften gällde *antalet* lösningar.

Del II # 15 (0/2) Funktion och derivata

15. Figuren visar huvuddragen av graferna till två funktioner f och g .



Sven påstår att funktionen g är derivata till funktionen f .
Undersök om han har rätt.

(0/2)

Studera derivatans teckenväxling och om funktionen f växer eller avtar.

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
g	+	0	-	0	+
f	avtar	min-punkt	växer	max-punkt	avtar

Där derivatan är positiv ska funktionen växa. Här är det tvärtom. Funktionen g kan alltså inte vara derivata till f .

Svar: g är inte derivata till f .

Kommentar: Det räcker att konstatera motsats i en punkt, exempelvis att f avtar och $g > 0$ då $x = -4$.

Del II # 16 (0/1) Två funktioner ...

16. g och f är två funktioner. Grafen till funktionen g tangerar grafen till funktionen f i punkten där $x = a$

Vilka **två** av nedanstående alternativ A - F måste då alltid vara uppfyllda?

A
 $f'(a) = g(a)$

B
 $f'(a) = 0$

C
 $f'(a) = g'(a)$

D
 $f(a) = g'(a)$

E
 $f(a) = g(a)$

F
 $g'(a) = 0$

Endast svar fordras (0/1)

Svar E stämmer eftersom de två funktionerna måste ha en gemensam punkt då $x = a$, alltså gäller $f(a) = g(a)$.

C stämmer. När de två funktionerna tangerar varandra har de samma lutning (derivata) i punkten där $x = a$, alltså gäller att $f'(a) = g'(a)$.

Del II # 17 (0/2/⊗) Tredjegradspolynom

17. Moa och Gustav undersöker var sin tredjegradsfunktion $y = f(x)$. Båda tredjegradsfunktionerna har två extrempunkter, dels för $x = 2$ och dels för $x = 6$. Deras lärare ber dem bestämma funktionernas största värde i intervallet $0 \leq x \leq 3$. Moa påstår att hennes funktion har det största värdet $f(2)$ och Gustav påstår att hans funktion har det största värdet $f(0)$. Läraren säger att båda har rätt.

Undersök hur det kan komma sig att båda kan ha rätt.

(0/2/⊗)

I den äldre kursen MaC ingick inte integraler. Det är naturligt att lösa detta problem med hjälp av integraler. Den lösning som följer är baseras enbart på kunskap om derivator.

Lösning utan kunskap om integraler

Vi ska försöka hitta två olika tredjegradspolynom där följande gäller

maxvärde	extremvärde	extremvärde	intervall
$f_{\text{Moa}}(2)$	$f'_{\text{Moa}}(2) = 0$	$f'_{\text{Moa}}(6) = 0$	$0 \leq x \leq 3$
$f_{\text{Gustaf}}(0)$	$f'_{\text{Gustaf}}(2) = 0$	$f'_{\text{Gustaf}}(6) = 0$	$0 \leq x \leq 3$

När man undersöker maximum eller minimum för en funktion på ett begränsat intervall så ska man

- undersöka punkter i det inre av intervallet där derivatan är noll
- kontrollera de två randpunkterna.

Funktionen f har två extremvärden. Detta betyder att derivatan f' har två nollställen. Derivatan är

$$f'(x) = K(x-2)(x-6).$$

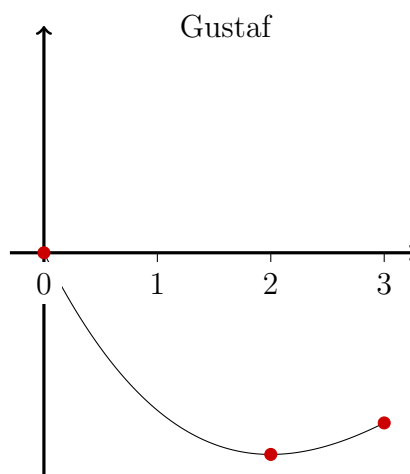
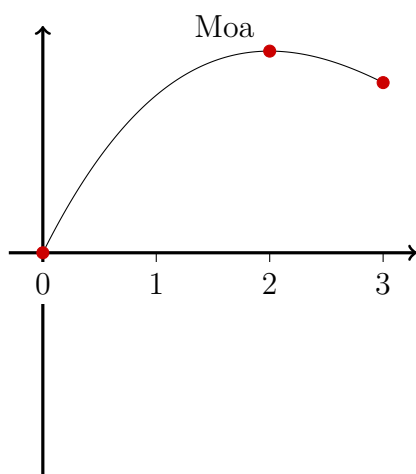
Notera konstanten K , det finns alltså många derivator $f'(x)$ som har nollställen $x = 2$ och $x = 6$. Gör teckentabeller för det intressanta området.

Teckentabell $K > 0$

x	$x < 2$	2	$2 < x < 6$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	max	↘

Teckentabell $K < 0$

x	$x < 2$	+2	$2 < x < 6$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	min	↗

**Fallet $K > 0$**

Det finns endast ett möjligt maximum, $x = 2$, i intervallet $0 \leq x \leq 3$. Derivatan har teckenväxlingen $+0-$. Moa har räknat rätt.

Fallet $K < 0$

Det finns två möjliga maximum, $x = 0$ respektive $x = 3$. Gustaf har svarat att $x = 0$ är maximum. Då måste han ha beräknat både $f(0)$ och $f(3)$ och konstaterat att $f(0) > f(3)$.

Svar Både Moa och Gustaf har räknat rätt som utredningen ovan visar.

Lösning med integral

$$f'(x) = K(x-2)(x-6) = K(x^2 - 8x + 12)$$

$$f(x) = K\left(\frac{x^3}{3} - 8\frac{x^2}{2} + 12x + C\right)$$

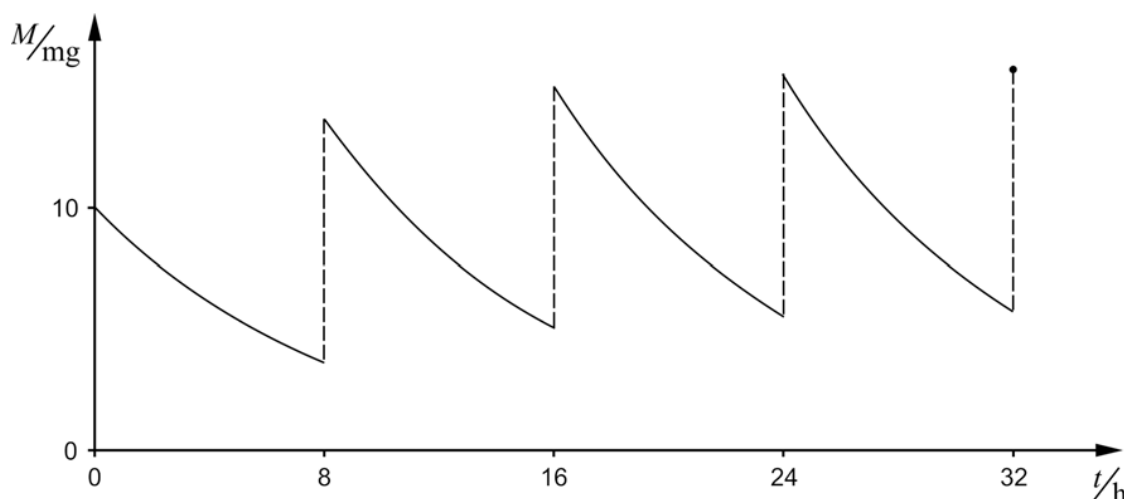
x	$f(x)$	
0	KC	max då $K < 0$
2	$K\frac{32}{3} + KC$	max då $K > 0$
3	$K9 + KC$	

Del II # 18 (2/5/⊗) Medicin, koncentration i blodet

18. Medicin som ges direkt i blodet börjar verka omedelbart, men det kan ta en eller två dagar innan medicinen får full effekt. Patienten får därför lika stora doser medicin med jämna mellanrum under en tidsperiod. För en viss medicin gäller att medicinmängden y mg i blodet, t timmar efter att patienten fått sin första dos av 10 mg medicin är:

$$y = 10e^{\frac{-t}{8}}$$

- Hur många mg medicin finns kvar i blodet 5 timmar efter att patienten fått sin första dos?
- Efter 8 timmar får patienten sin andra dos medicin. Hur många mg medicin finns totalt i blodet precis när patienten fått sin andra dos medicin?



Grafen ovan visar en enkel modell för hur den totala mängden medicin M mg i patientens blod varierar med tiden t timmar, fram till dess att patienten har fått sin femte dos.

- Teckna ett uttryck för den totala mängden medicin i blodet när patienten fått sin femte dos. Beräkna därefter denna mängd.

Antag att en patient fortsätter att få medicindoser enligt modellen ovan under en längre tid. Den totala mängden medicin i blodet kommer då att öka men den kan inte bli hur stor som helst.

- Bestäm den övre gränsen för totala mängden medicin i blodet.

(2/5/⊗)

Delfråga 1) Beräkna mängden då $t = 5$. Funktionen är

$$y(t) = 10 \cdot e^{\frac{-t}{8}}.$$

Den sökta mängden blir

$$y(5) = 10 \cdot e^{\frac{-5}{8}} = 5,3526.$$

Svar del 1) Mängden efter 5 timmar är 5,4 mg.

Delfråga 2) Beräkna mängden direkt efter 2:a sprutan vid tidpunkten $t = 8$. Låt $y(8-)$ beteckna mängden vid tidpunkten $t = 8$ innan 2:a sprutan.

$$y(8-) = \underbrace{10 \cdot e^{\frac{-8}{8}}}_{1:a \text{ sprutan}}$$

och $y(8+)$ betecknar mängden vid tidpunkten $t = 8$ direkt efter 2:a sprutan.

$$y(8+) = \underbrace{10}_{2:a \text{ sprutan}} + \underbrace{10 \cdot e^{\frac{-8}{8}}}_{1:a \text{ sprutan}} = 13,6788$$

Svar del 2) Mängden direkt efter 2:a dosen är 13,7 mg.

Delfråga 3) Mängd efter 5:e dosen? För tiderna 16+, 24+ och 32+ gäller

$$\begin{aligned} y(16+) &= \underbrace{10}_{3:e \text{ sprutan}} + \underbrace{10 \cdot e^{\frac{-8}{8}}}_{2:a \text{ sprutan}} + \underbrace{10 \cdot e^{\frac{-16}{8}}}_{1:a \text{ sprutan}} \\ y(24+) &= \underbrace{10}_{4:e \text{ sprutan}} + \underbrace{10 \cdot e^{\frac{-8}{8}}}_{3:e \text{ sprutan}} + \underbrace{10 \cdot e^{\frac{-16}{8}}}_{2:a \text{ sprutan}} + \underbrace{10 \cdot e^{\frac{-24}{8}}}_{1:a \text{ sprutan}} \\ y(32+) &= \underbrace{10}_{5:e \text{ sprutan}} + \underbrace{10 \cdot e^{\frac{-8}{8}}}_{4:e \text{ sprutan}} + \underbrace{10 \cdot e^{\frac{-16}{8}}}_{3:e \text{ sprutan}} + \underbrace{10 \cdot e^{\frac{-24}{8}}}_{2:a \text{ sprutan}} + \underbrace{10 \cdot e^{\frac{-32}{8}}}_{1:a \text{ sprutan}} \end{aligned}$$

Städa upp.

$$y(32+) = 10 \cdot [1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + e^{-4}]$$

Detta är en geometrisk serie. Använd FORMELSAMLINGEN.

**Geometrisk
summa**

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1} \quad \text{där } k \neq 1$$

Notera $n - 1$ respektive n i formeln för den geometriska summan. Heltalet n är antalet termer i summan.

$$y(32+) = 10 \cdot \frac{e^{-5} - 1}{e^{-1} - 1} \approx 15,7$$

Svar del 3) Direkt efter 5:e dosen är mängden 15,7 mg.

Delfråga 4) Bestäm en övre gräns.

I formeln för geometrisk summa förekommer k^n . I vårt fall är $k = e^{-1} \approx 0,37$. Efter lång tid blir n stort och då blir $0,37^n \approx 0$. Den övre gränsen blir $\frac{-1}{e^{-1} - 1} \approx 15,8$ mg.

Svar del 4) Den övre gränsen blir ungefär 15,8 mg.