

Innehåll

Förord	2
NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS B VÅREN 2011	2
NpMaB VT 2011 LÖSNINGAR	3
Del I: Digitala verktyg är INTE tillåtna	3
Del 1 # 1 (4/0) Lös ekvationerna	3
Del 1 # 2 (2/0) Rät linje	5
Del 1 # 3 (2/0) Ekvationssystem	7
Del 1 # 4 (1/1) Sannolikhet	8
Del 1 # 5 (2/0) Förenkla ett uttryck	9
Del 1 # 6 (0/1/⊗) Två linjer	10
Del 1 # 7 (0/3/⊗) Linje tangerar cirkel	11
Del II: Digitala verktyg är tillåtna	13
Del 2 # 8 (2/0) Likformighet	13
Del 2 # 9 (3/0) Stickprov	14
Del 2 # 10 (2/0) Punkt på linje?	15
Del 2 # 11 (2/0) Segelbåt	16
Del 2 # 12 (0/3) Sannolikhet, lyckohjul	18
Del 2 # 13 (0/3) Fia på löpband	19
Del 2 # 14 (1/3/⊗) 2:a gradsekvation	21
Del 2 # 15 (1/2/⊗) Variationsbredd	23
Del 3 # 16 (3/4/⊗) Stoppsträcka	25

Förord

Skolverket har endast publicerat *ett* kursprov till kursen Ma 2. Innehållet i den äldre kursen Ma B hör nu till Ma 1 och/eller Ma 2. I tabellen nedan framgår vilka uppgifter som är lämpliga till respektive kurs.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Ma 1		2		4								12				
Ma 2	1	2	3		5	6	7	8	9	10	11		13	14	15	16

Kom ihåg

- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan

- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

NpMaB VT 2011 LÖSNINGAR

Del I: Digitala verktyg är INTE tillåtna

Del 1 # 1 (4/0) Lös ekvationerna

Ma2

1. Lös ekvationerna

a) $x^2 - 6x - 16 = 0$ (2/0)

b) $x^2 + 4x = 0$ (2/0)

a) Använd FORMELSAMLINGEN. Där finns pq-formeln.

Regler

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Andragradsekvationer

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Ekvationen är

$$0 = x^2 \underbrace{-6}_{p=-6} \cdot x \underbrace{-16}_{q=-16}$$

och lösningen blir

$$x = \frac{-(-6)}{2} \pm \sqrt{3^2 - (-16)}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{9 + 16}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{25}$$

$$x = 3 \pm 5$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = -2.$$

b) Alla andragradsekvationer kan lösas med pq-formeln men några kan lösas enklare utan pq-formeln. Faktorisera ut x ur ekvationen

$$0 = x^2 - 4x.$$

Vi får

$$0 = x \cdot (x - 4).$$

Nu är ekvationen sin egen lösning. Nollproduktmetoden ger

$$0 = \underbrace{x}_{x=0} \cdot \underbrace{(x-4)}_{x=4}.$$

Svar b) Lösningen är $x = 0$ respektive $x = 4$.

Del 1 # 2 (2/0) Rät linje

Ma1
Ma2

2. En rät linje går genom punkterna (0, 2) och (4, 0)

a) Rita linjen i ett koordinatsystem.

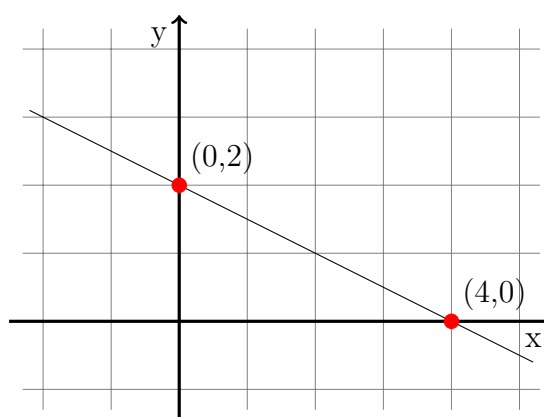
(1/0)

b) Ange linjens ekvation.

Endast svar fordras

(1/0)

a)



Svar a) Se figur ovan

b) Bestäm linjens ekvation. Ekvationen för den räta linjen finns i FORMELSAMLINGEN.

Räta linjen

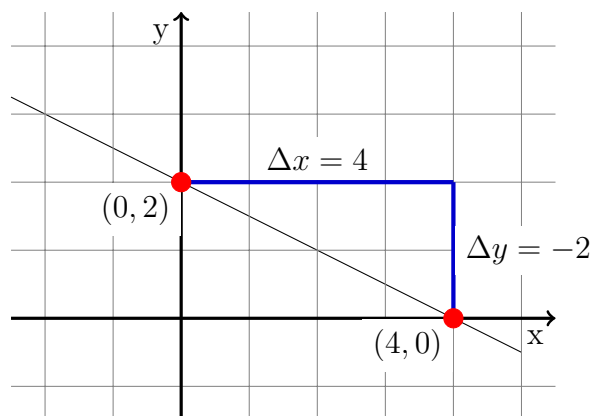
$$y = kx + m$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Andragradsfunktioner

$$y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

Uppgiften är att bestämma k och m i linjens ekvation $y = kx + m$.



Börja med att bestämma k .

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 2}{4 - 0} = -0,5.$$

Nu är linjens ekvation

$$y = -0,5x + m$$

och det återstår att bestämma m . Linjen går genom punkterna $(0, 2)$ respektive $(4, 0)$.

Använd någon av de två punkterna, förslagsvis punkten $(0, 2)$. Vi får

$$\underbrace{y}_{y=2} = -0,5 \underbrace{x}_{x=0} + \underbrace{m}_{m=2}.$$

vilket ger

$$m = 2.$$

Svar b) $y = -0,5 \cdot x + 2.$

Del 1 # 3 (2/0) Ekvationssystem

Ma2

3.	Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$	(2/0)
-----------	--	-------

Det finns två olika metoder för att lösa linjära ekvationssystem med flera obekanta. För ekvationssystem med bara två obekanta är det betydelselöst vilken metod du väljer.

Substitutionsmetoden är enkel och fungerar utmärkt för två obekanta.

$$2x + 3y = 14 \quad (1)$$

$$x + 2y = 0 \quad (2)$$

Skriv om ekvation (2) till

$$x = -2y \quad (3)$$

Substitutera x i ekvation (1) med hjälp av ekvation (3). Vi får

$$2 \cdot (-2y) + 3y = 14$$

$$-4y + 3y = 14$$

$$-y = 14$$

$$y = -14 \quad (4)$$

Med ekvation (3) och (4) kan x beräknas.

$$x = -2 \cdot (-14)$$

$$x = 28$$

Svar $x = 28$ och $y = -14$

Del 1 # 4 (1/1) Sannolikhet

Ma1

4. Vid en skidtävling med 20 deltagare sker starten individuellt. Deltagarna ska ha nummerlappar med nummer 1 till 20, där numret anger startordningen.

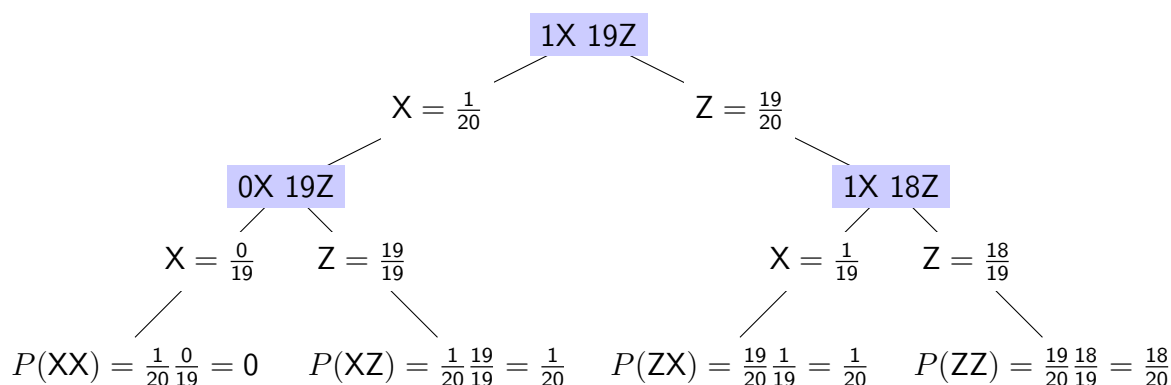
Marcus och Erik ska delta i tävlingen och båda vill starta sist, det vill säga båda vill ha nummer 20. Innan start får deltagarna slumpmässigt dra ett kuvert som innehåller en nummerlapp. Marcus får dra ett kuvert först av alla och Erik får dra direkt efter.

Innan de öppnar kuverten så säger Marcus till Erik: "Det är större chans att nummer 20 finns i mitt kuvert än i ditt eftersom jag fick dra först".

Avgör om Marcus har rätt genom att bestämma sannolikheterna för att Marcus respektive Erik får startnummer 20.

(1/1)

Låt X beteckna startnummer 20 och Z beteckna övriga 19 startnummer. I träd diagrammet visas de två första dragen vid dragning utan återläggning.



Resultatet av dragningen kan sammanfattas i följande tabell.

1:a draget	2:a draget	sannolikhet
nummer 20	nummer 20	0
nummer 20	nummer 1–19	$\frac{1}{20}$
nummer 1–19	nummer 20	$\frac{1}{20}$
nummer 1–19	nummer 1–19	$\frac{18}{20}$

Svar Det saknar betydelse vem som drar först, båda har lika sannolikhet att få nummer 20.

Del 1 # 5 (2/0) Förenkla ett uttryck

Ma2

5. Förenkla uttrycket $(x-2)^2 + (3-x)(x-4)$ så långt som möjligt. (2/0)

$$\overbrace{(x-2)^2}^{1:a \text{ termen}} + \overbrace{(3-x)(x-4)}^{2:a \text{ termen}}$$

1:a termen kan utvecklas med 2:a kvadreringsregeln som finns i FORMELSAMLINGEN.

Regler

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Andragradsekvationer

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\underbrace{(x-2)^2}_{x^2-4x+4} + \overbrace{(3-x)(x-4)}^{2:a \text{ termen}}$$

Jobba med andra termen

$$x^2 - 4x + 4 + \underbrace{(3-x)(x-4)}_{3(x-4) - x(x-4)}$$

$$x^2 - 4x + 4 + 3(x-4) - x(x-4)$$

$$x^2 - 4x + 4 + 3 \cdot x - 3 \cdot 4 - (x^2 - x \cdot 4)$$

$$x^2 - 4x + 4 + 3 \cdot x - 3 \cdot 4 - x^2 + x \cdot 4$$

$$3x - 8$$

Svar $3x - 8$.

Del 1 # 6 (0/1/⊗) Två linjer

Ma2

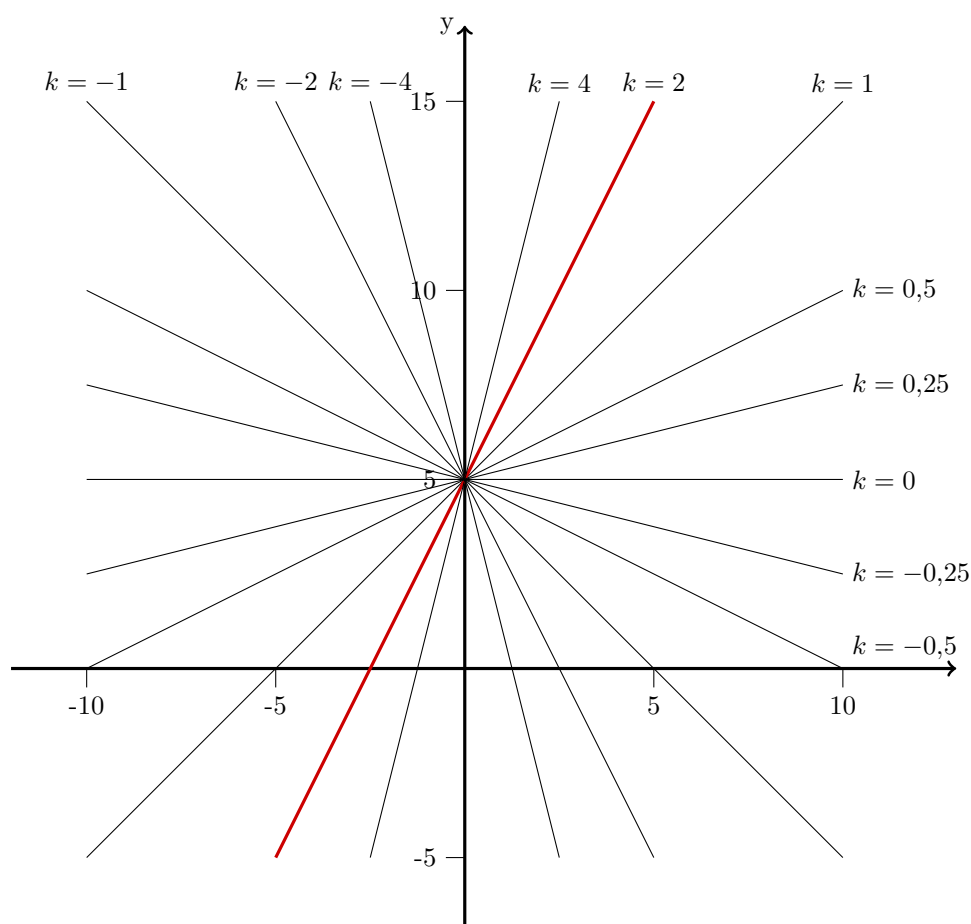
6. Två linjer $y = 2x + 5$ och $y = kx + m$ skär varandra i en enda punkt. Den punkten ligger på y -axeln.

Vilka värden kan riktningskoefficienten k ha? Motivera.

(0/1/□)

Linjen $y = kx + m$ har $m = 5$ då den skär y -axeln i samma punkt som $y = 2x + 5$. Riktningskoefficienten k kan ha alla värden utom $k = 2$. Enligt uppgiften ska de två linjerna skära varandra i *en enda punkt*. Med $k = 2$ är de två linjerna identiska och har *alla* punkter gemensamma.

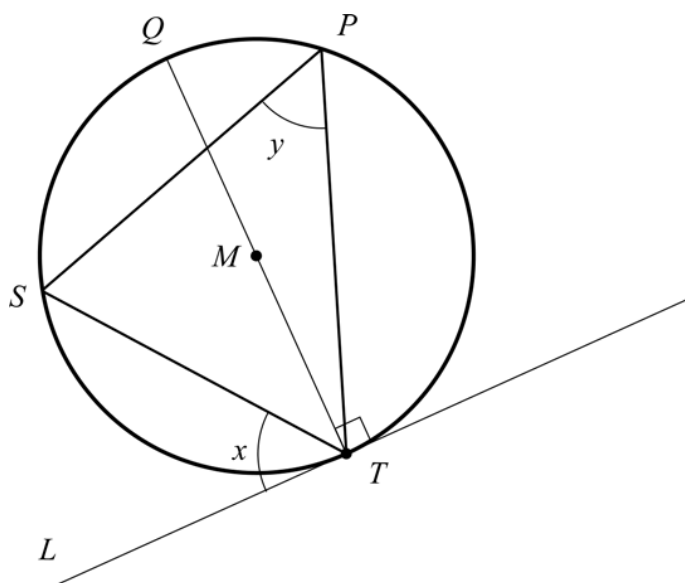
Svar Alla k utom $k = 2$ är möjliga.



Del 1 # 7 (0/3/⊗) Linje tangerar cirkel

Ma2

7. En linje L tangerar en cirkel i punkten T . M är cirkelns medelpunkt. Vinkeln mellan cirkelns diameter QT och linjen L är 90° . En triangel PST ligger i cirkeln med alla hörnen på cirkelns rand. Se figur.



- a) Hur stor är vinkeln y då vinkeln x är 56° ? (0/2)

Om punkterna P och S flyttas längs cirkelns rand kommer vinklarna x och y att variera. För vinkeln x gäller $0^\circ < x < 90^\circ$

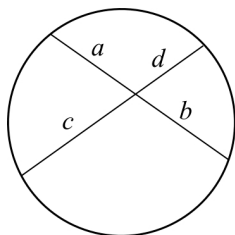
- b) Bestäm sambandet mellan vinklarna x och y . (0/1/∞)

Det går att "förenkla figuren" genom att vrida figuren. Detta påverkar inte problemet att finna ett samband mellan $\angle SPT$ även kallad y och $\angle STL$ även kallad x . Symbolen $\angle$ betecknar vinkel och följs av en bokstav, $\angle P$, eller tre bokstäver, $\angle SPT$.

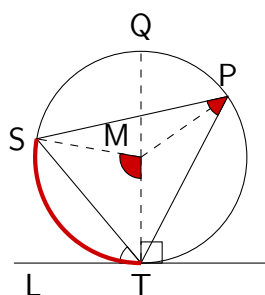
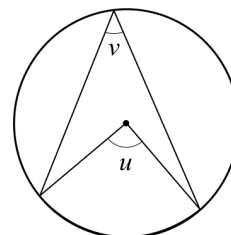
Hur ska detta problem lösas? I figuren ligger punkterna P , S och T på randen till en cirkel med medelpunkten M . I FORMELSAMLINGEN finns randvinkelsatsen.

Kordasatsen

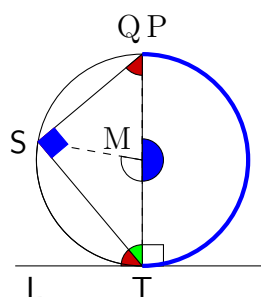
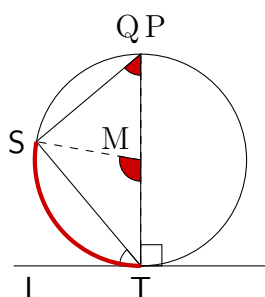
$$ab = cd$$

**Randvinkelsatsen**

$$u = 2v$$



Till bågen ST hör en medelpunktsvinkel och en randvinkel. Enligt randvinkelsatsen är randvinkeln $\angle SPT$ hälften av medelpunktsvinkeln $\angle SMT$. Flytta punkten P till Q. Använd randvinkelsatsen igen, bågen PT har medelpunktsvinkeln $\angle PMT$ som är 180° . Motsvarande randvinkel $\angle PST$ blir hälften, alltså 90° och triangeln PST är rätvinklig.



Vinklarna $\angle SPT$ och $\angle STP$ blir nu komplementvinklar (summan 90°).

$$90^\circ = \angle SPT + \angle STP$$

Vid punkten T gäller att

$$90^\circ = \angle STL + \angle STP$$

vilket ger

$$\angle STL = \angle SPT.$$

Svar a) Vinkeln $x = y = 56^\circ$.

Svar b) Vinklarna x och y är lika stora.

Del II: Digitala verktyg är tillåtna

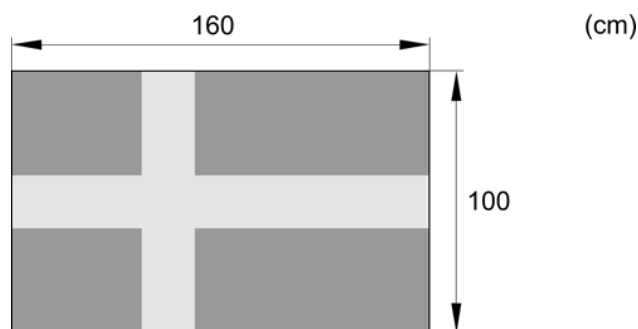
Del 2 # 8

(2/0)

Likformighet

Ma2

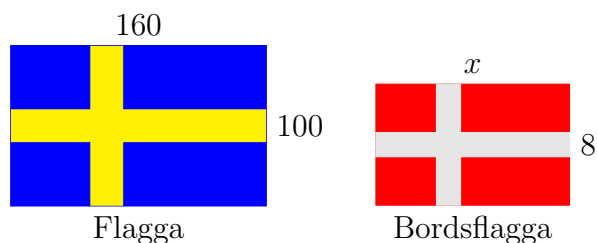
8. En svensk flagga med långsidan 160 cm och kortsidan 100 cm uppfyller gällande flagglag. Anna vill göra en liten bordsflagga med kortsidan 8 cm.



Hur lång ska Anna göra sin flagga för att den ska vara likformig med den stora flaggan?

(2/0)

Figuren illustrerar flagga och bordsflagga.



Lösning variant 1

$$\frac{\text{bordsflaggan}}{\text{flaggan}} = \frac{x}{160} = \frac{8}{100}$$
$$x = 12,8$$

Lösning variant 2

$$\frac{\text{långsida}}{\text{kortsida}} = \frac{160}{100} = \frac{x}{8}$$
$$x = 12,8$$

Svar Anna ska göra flaggan 12,8 cm lång.

Del 2 # 9 (3/0) Stickprov

Ma2

- 9.** Företaget Rund Plast AB tillverkar bland annat innebandybollar. Varje månad tillverkas 50 000 innebandybollar.
- Efter klagomål från kunder beslöt Rund Plast AB:s ledning att göra en kvalitetskontroll. Under en månad kontrollerades kvaliteten på var 200:e innebandyboll som tillverkades. Man hittade 11 bollar som var av dålig kvalitet.
- a) Här ovan beskrivs en stickprovsundersökning. Hur stort var stickprovet? (1/0)
- b) Hur många av de innebandybollar som tillverkades under en månad kan antas ha varit av dålig kvalitet? (2/0)

a) Av totalt 50 000 bollar testas var 200:e boll. Det betyder att $\frac{50\,000}{200} = 250$ bollar utgör stickprovet.

Svar a) Stickprovet är 250 bollar.

b) Av stickprovets 250 bollar är 11 dåliga. Andelen dåliga bollar i stickprovet är $\frac{11}{250}$. Med antagandet att samma andel av de tillverkade bollarna är dåliga blir antalet dåliga bollar $\frac{11}{250} \times 50\,000 = 2\,200$ stycken.

Svar b) 2 200 dåliga bollar.

Del 2 # 10 (2/0) Punkt på linje?

Ma2

10. En rät linje har riktningskoefficienten $k = 1,2$ och skär y -axeln i punkten $(0, 3)$ Avgör om punkten $(175, 207)$ ligger på linjen.

(2/0)

Ekvationen för den räta linjen finns i FORMELSAMLINGEN.

Räta linjen

$$y = kx + m \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Andragsgradsfunktioner

$$y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

Linjens ekvation är

$$y = 1,2 \cdot x + 3$$

eftersom $k = 1,2$ är given i uppgiften och linjen går genom punkten $(0, 3)$.Kontrollera om punkten $(175, 207)$ ligger på linjen. Stoppa in $x = 175$ i linjens ekvation

$$\underbrace{y}_{213} = 1,2 \cdot \overbrace{x}^{175} + 3$$

ut trillar $y = 213$. När $x = 175$ blir $y = 213$ och punkten $y = 207$ ligger alltså inte på linjen.**Svar** Punkten $(175, 207)$ ligger inte på linjen.

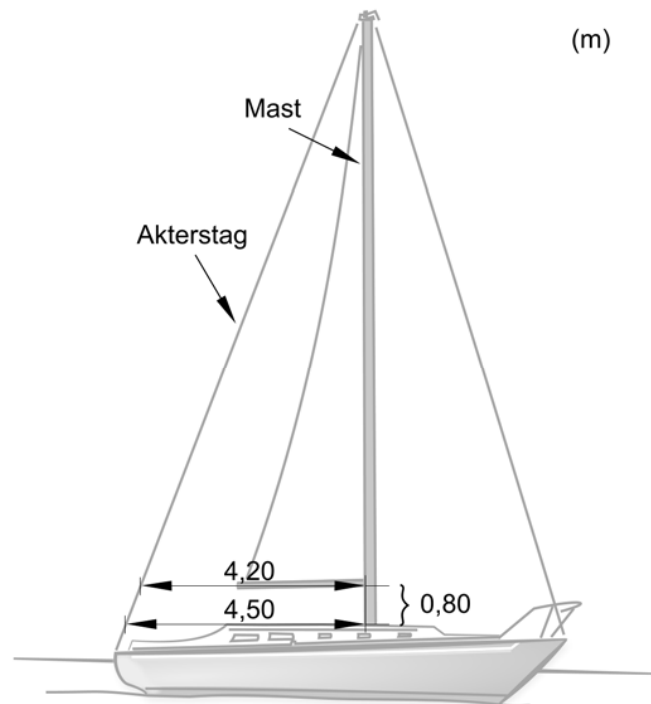
Del 2 # 11

(2/0)

Segelbåt

Ma2

11. Lina och Sara är ute och seglar i en båt som de har lånat. De seglar mot en bro och börjar fundera på om masten är för hög för att båten ska kunna passera under bron. För att kunna bestämma mastens höjd gör de några mätningar.



Lina och Sara mäter avståndet från mastens fot och rakt ut mot akterstaget och finner att det är 4,50 m. Sedan mäter de avståndet från masten till akterstaget 0,80 m högre upp och parallellt med första mätningen. Det avståndet är 4,20 m. Se figur.

Använd de mätningar som Lina och Sara har gjort och bestäm mastens höjd. (2/0)

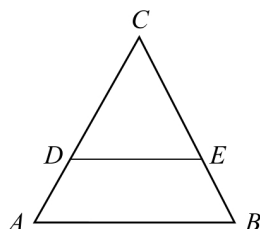
Använd FORMELSAMLINGEN där finns topptriangelsatsen.

Topptriangel- och transversalsatsen

Om DE är parallell med AB gäller

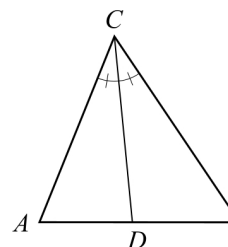
$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{CE}{BC} \text{ och}$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$$

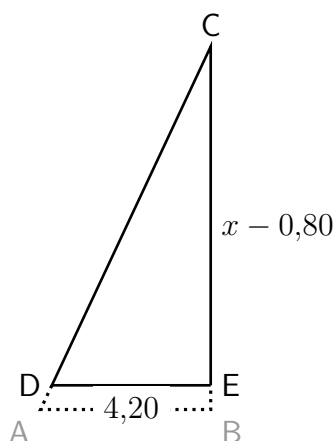
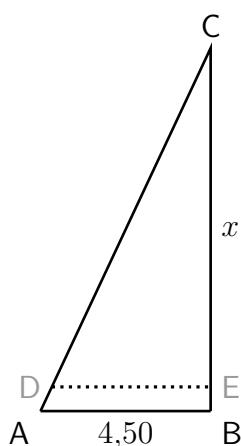


Bisektrissatsen

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$



Rita figur.



$$\begin{aligned} AB &= 4,50 \\ DE &= 4,20 \\ BE &= 0,80 \\ BC &= x \\ EC &= x - 0,80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4,20}{4,50} &= \frac{x - 0,80}{x} = 1 - \frac{0,80}{x} \\ \frac{0,80}{x} &= \frac{4,50 - 4,20}{4,50} \\ x &= 0,80 \cdot \frac{4,50}{4,50 - 4,20} = 12 \end{aligned}$$

Svar Mastens höjd är 12 m.

Kommentar Små mätfel i AB eller DE ger stora fel i AC. Med $DE=4,29$ istället för 4,30 cm blir mastens höjd 11,6 m.

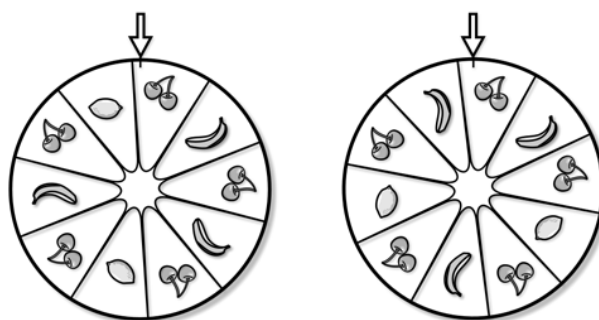
Del 2 # 12

(0/3)

Sannolikhet, lyckohjul

Ma1

12. Elin, Petter och Ali är på ett nöjesfält. Där finns ett spel med två likadana snurrande lyckohjul med bilder av bananer, citroner och körsbär. Hjulen snurrar oberoende av varandra. Spelet ger vinst om pilarna på respektive hjul pekar på bilder av samma sorts frukt då hjulen stannar. Se figur.



- a) Elin satsar på att båda hjulen stannar på körsbär. Hur stor är sannolikheten att hon vinner? (0/1)
- b) Samtidigt som Elin satsar på körsbär, satsar Petter på bananer och Ali på citroner. Hur stor är sannolikheten att ingen av de tre vinner? (0/2)

Varje hjul har bil på 5 körsbär, 3 bananer och 2 citroner, totalt 10 bilder. Sannolikheten att ett hjul ska stanna på respektive bild framgår av tabellen.

körsbär	0,5
bananer	0,3
citroner	0,2

Hjulen är oberoende av varandra och sannolikheten för de möjliga utfallen framgår av tabellen nedan.

	körsbär	banan	citron
körsbär	0,25	0,15	0,10
banan	0,15	0,09	0,06
citron	0,10	0,06	0,04

Två lika bilder ger vinst. Utfallen i diagonalen ger vinst och utfallen vid sidan om diagonalen ger ingen vinst. Sannolikheten för att det inte blir någon vinst är summan av elementen utanför diagonalen alltså $2 \cdot (0,15 + 0,10 + 0,06) = 0,62$.

Svar a) Sannolikheten för två körsbär är 0,25.

Svar b) Sannolikheten för ingen vinst är 0,62.

Del 2 # 13

(0/3)

Fia på löpband

Ma2

13. Fia springer på ett löpband som kan ställas in på olika hastigheter. På en display kan hon avläsa hur mycket energi hon förbrukar under ett träningspass på löpbandet. Energin anges i enheten kcal.



Fia brukar först ställa in löpbandet på hastigheten 8 km/h ("låg" hastighet) för att sedan öka hastigheten till 12 km/h ("hög" hastighet). Tabellen visar exempel på Fias träningspass på löpbandet.

	Tid		Energiförbrukning
	"låg" hastighet	"hög" hastighet	
Träningspass 1	20 min	10 min	300 kcal
Träningspass 2	10 min	15 min	280 kcal

Hur mycket energi per minut (kcal/min) förbrukar Fia då hon springer med "låg" respektive "hög" hastighet?

(0/3)

Inför variabler. Låt x vara energiförbrukning i kcal/min vid "låg" hastighet och y vid "hög" hastighet.

Steg-1: Skapa ett ekvationssystem med två linjära ekvationer.

$$20x + 10y = 300 \quad \text{1:a ekvationen} \quad (1)$$

$$10x + 15y = 280 \quad \text{2:a ekvationen} \quad (2)$$

Steg-2: Lös ekvationssystemet (skapa triangulärt system).

$$20x + 10y = 300 \quad \text{behåll 1:a ekvationen} \quad (3)$$

$$+ 10y = 130 \quad \text{ekvation (4) = ekvation (2) - } \frac{1}{2} \times \text{ekvation (1)} \quad (4)$$

Steg-3: Lös först ekvation (4) och sedan (3).

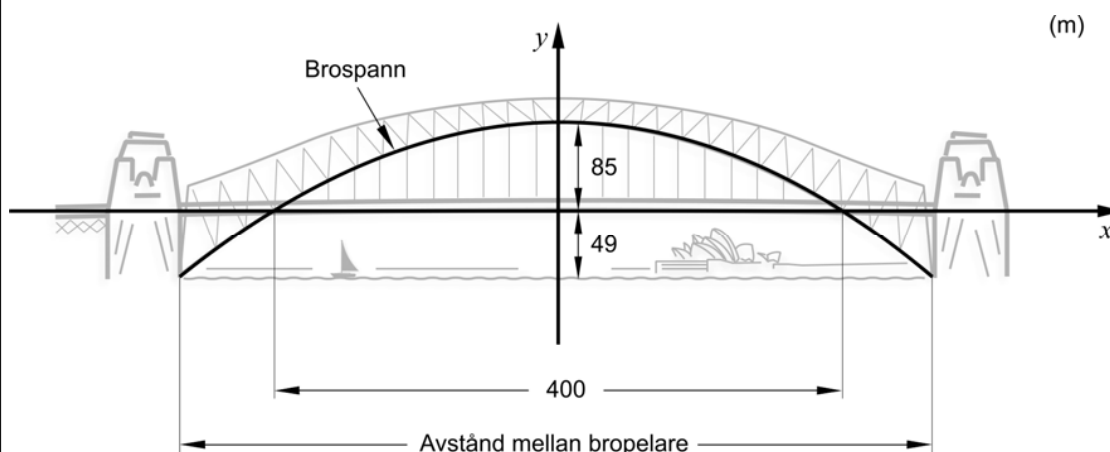
Ekvation (4) ger $y = 13$ och med $y = 13$ ger ekvation (3) att $x = 8,5$.

Svar Fia förbrukar 8,5 kcal/min då hon springer med "låg" respektive 13 kcal/min vid "hög" hastighet.

Del 2 # 14 (1/3/⊗) 2:a gradsekvation

Ma2

14. En av sevärdheterna i Sydney är den stora stålbron, Sydney Harbour Bridge. Mellan bropelarna löper ett brospann som har formen av en andragradskurva. Den högsta punkten är belägen 85 meter över vägbanan. Vägbanan ligger i sin tur 49 meter över vattenytan. Brospannet befinner sig ovanför vägbanan längs en 400 meter lång vägsträcka. Se figur.



Ekvationen för andragradskurvan som beskriver brospannet kan skrivas som $y = ax^2 + b$, där a och b är konstanter.

- a) Vilket värde har konstanten b för den andragradskurva som beskriver brospannet? *Endast svar fordras* (1/0)
- b) Hur långt är avståndet mellan bropelarna? (0/3/⊗)

a) Vilket värde har konstanten b ?

Använd ekvationen för brospannet och uppgifter ur problemets figur för att bestämma b .

$$\overbrace{y}^{y=85} = \overbrace{ax^2}^{x=0} + \underbrace{b}_{b=85}$$

Svar a) $b = 85$

b) Hur långt är avståndet mellan bropelarna?

Ekvationen för brospannet är

$$y = ax^2 + 85.$$

Bestäm a . Från figuren framgår att då $x = \pm 200$ så är $y = 0$.

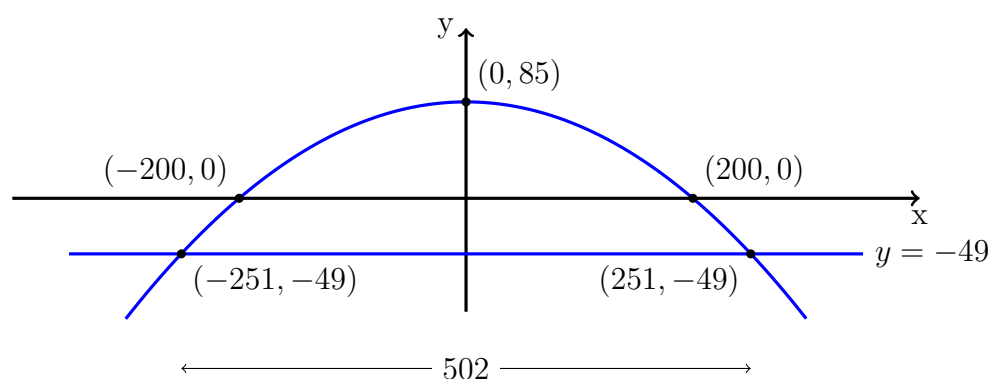
$$\underbrace{y=0}_y = \underbrace{a}_{a=\frac{-85}{40\,000}} \cdot \underbrace{x^2}_{x=200} + \underbrace{b}_{b=85}$$

Bestäm skärningspunkt mellan brospannet och vattenytan. Vi har ekvationen

$$\underbrace{y=-49}_y = \frac{-85}{40\,000} \cdot \underbrace{x^2}_{x=\pm 251,12} + \underbrace{b=85}_b$$

med lösningen

$$x = \pm \sqrt{(85 + 49) \frac{40\,000}{85}} \approx \pm 251,12.$$



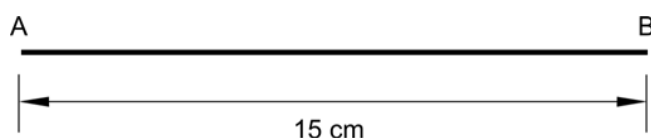
Svar b) Avståndet mellan bropelarna är 502 meter.

Kommentar 500 meter är också ett lämpligt svar men 502,24 är inte ett lämpligt svar.

Del 2 # 15 (1/2/⊗) Variationsbredd

Ma2

15. En sträcka AB är 15 cm lång. Sträckan kan delas i fem delsträckor på olika sätt. Längden av varje delsträcka måste vara större än noll.



- a) Gör en indelning av sträckan AB så att variationsbredden för delsträckornas längder blir 12,5 cm. (1/1)
- b) Beroende på hur man delar in sträckan AB i fem delsträckor kan variationsbredden variera. Utred vilka värden som är möjliga för variationsbredden när man ändrar på de fem delsträckornas längder. (0/1/⊗)

- a) Dela in sträckan 15 cm i 5 delar och sortera delarna i storleksordning. Vi får
- $$0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \quad (1)$$

och

$$15 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5. \quad (2)$$

Variationsbredden är $x_{\max} - x_{\min}$. Konkret i detta problem gäller

$$12,5 = x_5 - x_1. \quad (3)$$

Ekvation (2) och (3) ger

$$\begin{aligned} 15 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \overbrace{12,5 + x_1}^{x_5} \\ 2,5 &= \underbrace{x_1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4}_{5 \text{ termer}} \end{aligned} \quad (4)$$

Det finns naturligtvis många olika möjligheter att välja x_1, x_2, x_3 och x_4 så att ekvation (4) blir uppfylld. Välj något enkelt, välj alla 5 termer lika. Ekvation (4) ger

$$0,5 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$$

Med vald lösning ger (2)

$$15 = \underbrace{0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5}_{13} + x_5.$$

Svar a) En möjlig indelning är 0,5 0,5 0,5 0,5 och 13 cm.

b) Studera mellan vilka gränser variationsbredden kan variera. Med alla delar lika $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 3$ cm blir variationsbredden 0.

$$15 = \underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}_{\text{små termer}} + \underbrace{x_5}_{\text{stor term}}$$

Med små värden på x_1, x_2, x_3 och x_4 blir variationsbredden $x_5 - x_1 < 15$. Likhet kan inte uppnås eftersom $0 < x_1$.

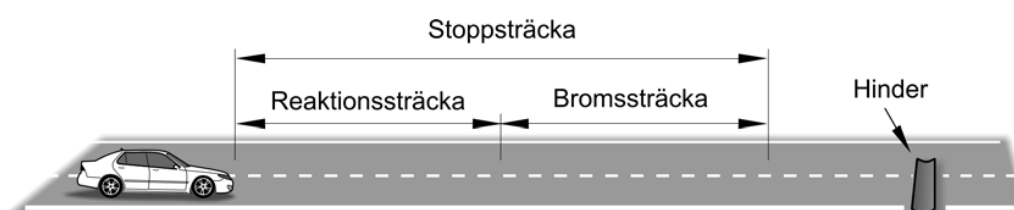
Svar b) $0 \leq \text{variationsbredd} < 15$ cm.

Del 3 # 16 (3/4/⊗) Stoppsträcka

Ma2

16. I samband med bilkörning brukar man tala om *stoppsträcka* i situationer då föraren upptäcker ett hinder, bromsar in och stannar.

Stoppsträckan s kan delas in i två delar. Den första delen, *reaktionssträckan*, är den sträcka bilen rör sig från det att föraren ser ett hinder till dess att föraren reagerar och trycker på bromspedalen. Den andra delen, *bromssträckan*, är den sträcka som bilen rör sig från det att föraren börjar bromsa till det att bilen stannar. Se figur.



Stoppsträckan s vid ett visst väglag kan beräknas enligt följande formel:

$$s = \underbrace{0,27v}_{\text{Reaktionssträcka}} + \underbrace{0,005v^2}_{\text{Bromssträcka}}$$

där stoppsträckan s anges i meter och hastigheten v anges i km/h.

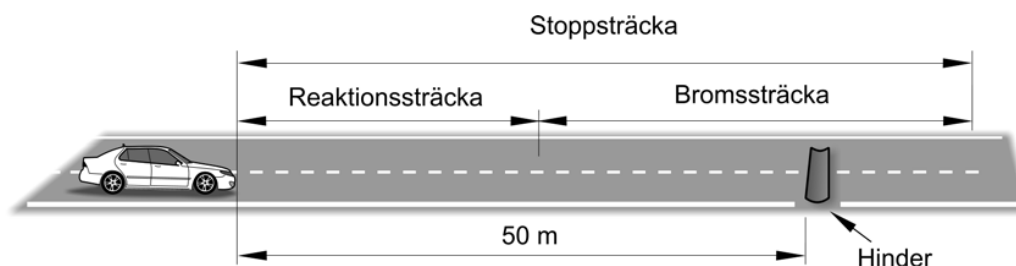
- Beräkna reaktionssträcka, bromssträcka och stoppsträcka för hastigheterna 70 km/h, 90 km/h och 110 km/h. Rita av tabellen och fyll i dina värden.

Hastighet (km/h)	Reaktionssträcka (m)	Bromssträcka (m)	Stoppsträcka (m)
70			
90			
110			

Vid landsvägskörning i mörker lyser halvljusen upp vägen cirka 50 meter framför bilen. Det är vid det avståndet föraren tidigast kan upptäcka ett hinder.

- Undersök för vilka hastigheter det är möjligt att kunna stanna på 50 meter.

Enligt formeln för stoppsträckan $s = 0,27v + 0,005v^2$ hinner föraren inte stanna före ett hinder som upptäcks då avståndet till hindret är 50 meter och föraren kör med hastigheten 110 km/h. Tänk dig att bilen kan passera hindret och att föraren fortsätter att bromsa. Se figur.



- Hur långt efter hindret stannar bilen om hastigheten är 110 km/h då föraren upptäcker hindret?
- Vilken hastighet har bilen när den är vid hindret om hastigheten är 110 km/h då föraren upptäcker hindret?

Den hastighet som bilen har vid hindret beror av den ursprungliga hastigheten då föraren upptäcker hindret och avståndet fram till hindret.

Tänk dig nu att bilens ursprungliga hastighet är v km/h då föraren upptäcker ett hinder på 50 meters avstånd och att bilens hastighet vid hindret är u km/h.

- Undersök och beskriv sambandet mellan u och v .

(3/4/□)

Vid bedömningen av ditt arbete med denna uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:

- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur långt mot en generell lösning du kommer
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

Fyll i tabellen

Hastighet (km/h)	Reaktionssträcka (m)	Bromssträcka (m)	Stoppsträcka (m)
70	$0,27 \cdot 70 = 18,9$	$0,005 \cdot 70^2 = 24,5$	$18,9 + 24,5 = 43,8$
90	$0,27 \cdot 90 = 24,3$	$0,005 \cdot 90^2 = 40,5$	$24,3 + 40,5 = 64,8$
110	$0,27 \cdot 110 = 29,7$	$0,005 \cdot 110^2 = 60,5$	$29,7 + 60,5 = 90,2$

Undersök för vilka hastigheter det är möjligt att kunna stanna på 50 meter.

Denna uppgift kan lösas analytiskt eller numeriskt/grafiskt.

Alternativ: analytiskt lösning. Stoppa in $s = 50$ i formeln för stoppsträckan och lös ut v med pq-formeln.

$$\underbrace{50}_s = \underbrace{0,27 \cdot v + 0,005 \cdot v^2}_{\text{pq-formeln ger } v}$$

$$0 = 0,27 \cdot v + 0,005 \cdot v^2 - 50$$

Normalisera ekvationen, alltså ordna så att koefficienten framför v^2 blir 1. Dividera alla termer i ekvationen med 0,005.

$$0 = v^2 + 54v - 10\,000$$

$$v_{1,2} = -27 \pm \sqrt{27^2 + 10\,000}$$

$$v_1 = -27 + \sqrt{27^2 + 10\,000} \approx 76,6$$

$$v_2 \approx -130,6 \quad \text{negativ rot, ej intressant}$$

Alternativ: grafisk/numerisk lösning. Den ekvation som ska lösas är

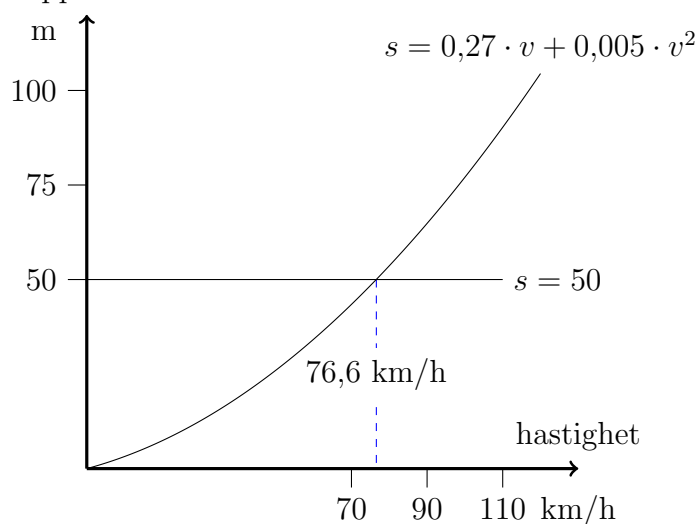
$$\underbrace{50}_{\text{vänsterled}} = \underbrace{0,27 \cdot v + 0,005 \cdot v^2}_{\text{högerled}}$$

Använd grafitande miniräknare. Plotta vänsterled och högerled och bestäm skärningspunkten.

Kommandon till Texas-räknare

Y=	mata in funktion(er)
GRAPH	rita graf
WINDOW	välj fönster, standard är $X_{\min} = -10$, $X_{\max} = 10$, $Y_{\min} = -10$, $Y_{\max} = 10$ i detta problem är det lämpligare med $X_{\min} = 0$, $X_{\max} = 100$, $Y_{\min} = 0$, $Y_{\max} = 100$
TRACE	ger cursorns x - och y -koordinat på kurva
2ND CALC	välj intersect i denna uppgift för att bestämma skärningspunkt

stoppsträcka



Uppgiften gäller att bestämma *för vilka hastigheter* det är möjligt att stanna vid hindret. Den högsta möjliga hastigheten v är 76,6 och den lägsta är $0 < v$ km/h. Hastigheten noll är inte möjlig.

Svar Möjliga hastigheter är $0 < v \leq 76,6$ km/h.

Hur långt efter hindret stannar bilen om hastigheten är 110 km/h då föraren upptäcker hindret?

Enligt tabellen är stoppsträckan 90,2 meter, det är 40,2 meter efter hindret.

Svar 40,2 meter

Vilken hastighet har bilen när den är vid hindret om hastigheten är 110 km/h då föraren upptäcker hindret?

Enligt uppgiften gäller att stoppsträckan s är

$$s = \underbrace{0,27 \cdot v}_{\text{reaktionssträcka}} + \underbrace{0,005 \cdot v^2}_{\text{bromssträcka}}.$$

Antag att bilens hastighet vid hindret är u km/h. Enligt tidigare är bromssträckan efter hindret 40,2 meter. Formeln för bromssträcka ger

$$40,2 = 0,005 \cdot \underbrace{u^2}_{u=89,666}$$

Svar Hastigheten vid hindret är 89,7 km/h.

Undersök och beskriv sambandet mellan u och v .

Låt v vara utgångshastighet och u hastigheten vid hindret. Utgångspunkt för sambandet u och v är

$$\underbrace{0,005 \cdot u^2}_{\text{bromssträcka från } u \text{ km/h}} = \underbrace{0,27 \cdot v + 0,005 \cdot v^2 - 50}_{\text{stoppsträcka bortom hindret}}$$

som kan förenklas till

$$u^2 = 54 \cdot v + v^2 - 10\,000.$$

Detta samband gäller för sådana v att högerledet är positivt. För $v \leq 0$ gäller att lösning saknas och för utgångshastigheter så låga att hindret inte passeras gäller att $u = 0$.

Svar

$$u = \begin{cases} \text{lösning saknas} & : & v \leq 0 \\ 0 & : & 0 < v \leq -27 + \sqrt{27^2 + 10\,000} \\ \sqrt{54v + v^2 - 10\,000} & : & -27 + \sqrt{27^2 + 10\,000} \leq v \end{cases}$$

Kommentar I Skolverkets rättningsnorm förekommer endast svaret

$u = \sqrt{54v + v^2 - 10\,000}$ på deluppgiften *undersök och beskriv sambandet mellan u och v* . Skolverkets rättningsnorm behandlar alltså enbart fallet att bilen passerar hindret.