

Innehåll

Förord	2
NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS B VÅREN 2005	3
MaB VT 2005 LÖSNINGAR	3
Del I, 9 Digitala verktyg är INTE tillåtna	3
Del I # 1 (4/0) Lös ekvationen	3
Del I # 2 (1/0) Statistik, variationsbredd	4
Del I # 3 (2/0) Bestäm vinkeln	5
Del I # 4 (3/0) Räta linjen	7
Del I # 5 (2/0) Linjärt ekvationssystem	10
Del I # 6 (2/0) Lös olikhet	11
Del I # 7 (0/2) Två tärningar	12
Del I # 8 (0/1) Ge ekvationen för en linje	13
Del II, Digitala verktyg är tillåtna	14
Del II # 9 (2/0) Förenkla	14
Del II # 10 (2/1) Sannolikhet	15
Del II # 11 (4/0) Linjärt ekvationssystem, godis	16
Del II # 12 (0/2) Likformighet	18
Del II # 13 (0/2) Röstning och bortfall	20
Del II # 14 (3/2/⊗) Grafer	21
Del II # 15 (0/3/⊗) Bildformat	23
Del II # 16 (0/2/⊗) Geometriskt bevis	25
Del II # 17 (3/4/⊗) Tändstickor och formler	26

Förord

Skolverket har endast publicerat *ett* kursprov till kursen Ma 2. Innehållet i den äldre kursen Ma B hör nu till Ma 1 och/eller Ma 2. I tabellen nedan framgår vilka uppgifter som är lämpliga till respektive kurs.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Ma 1						6	7			10							17
Ma 2a	1			4	5			?	?						15		
Ma 2bc	1	2	3	4	5			8	9		11	12	13	14	15	16	

Kom ihåg

- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan

- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

MaB VT 2005 LÖSNINGAR

Del I # 1 (4/0) Lös ekvationen

Ma2

1. Lös ekvationerna

a) $x^2 + 2x - 8 = 0$ (2/0)

b) $40x + 10x^2 = 0$ (2/0)

a) Lös ekvationen $x^2 + 2x - 8 = 0$. Använd FORMELSAMLINGEN

Regler

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Andragradsekvationer

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$0 = x^2 + \underbrace{2}_{p=2}x \underbrace{-8}_{q=-8}$$

Vi får

$$x_1 = -1 + \sqrt{1^2 - (-8)} = -1 + \sqrt{9} = -1 + 3 = 2$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{1^2 - (-8)} = -1 - \sqrt{9} = -1 - 3 = -4$$

Svar a) $x_1 = 2$ och $x_2 = -4$ TIPS: Kontrollera alltid att lösningen uppfyller ekvationen.

b) Lös ekvationen

$$0 = 40x + 10x^2$$

Denna ekvation kan givetvis lösas med pq-formeln men den är lättare att lösa genom faktorisering. Dela upp i faktorer

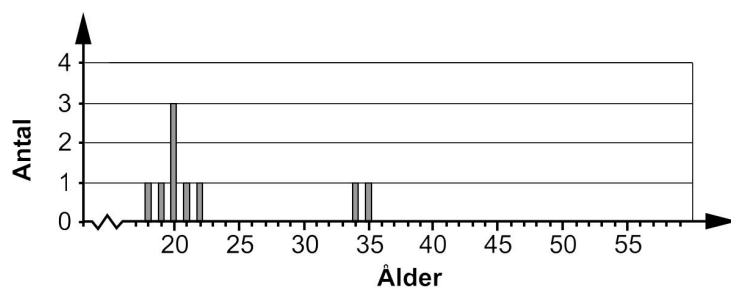
$$0 = 10 \cdot \underbrace{(4+x)}_{x=-4} \cdot \underbrace{x}_{x=0}$$

Svar b) $x_1 = -4$ och $x_2 = 0$

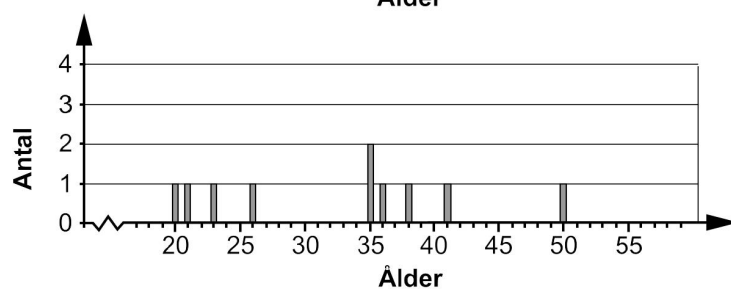
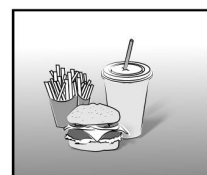
Del I # 2 (1/0) Statistik, variationsbredd

Ma2

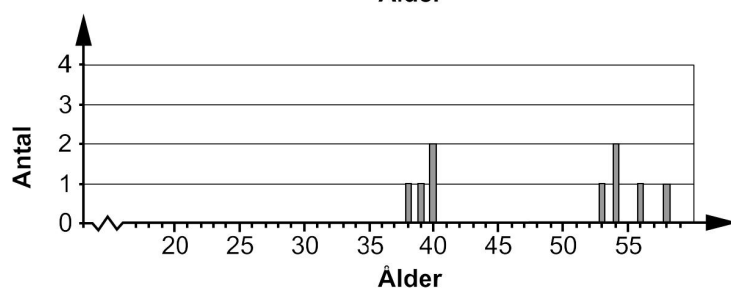
2. Diagrammen nedan visar åldersfördelningen på tre olika arbetsplatser.



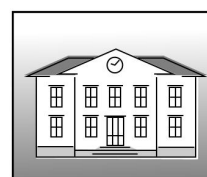
Hamburgerbar



IT - företag



Skola



Vilken arbetsplats har den största variationsbredden och hur stor är denna?

Endast svar fordras

(1/0)

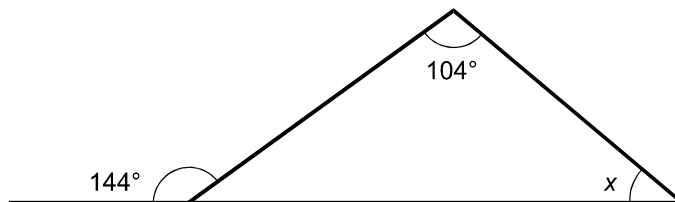
Företag	högsta	lägsta	variationsbredd	
Hamburgerbar	35	18	17	
IT-företag	50	20	30	← störst
Skola	58	38	20	

Svar IT-företaget har störst variationsbredd, 30 år.

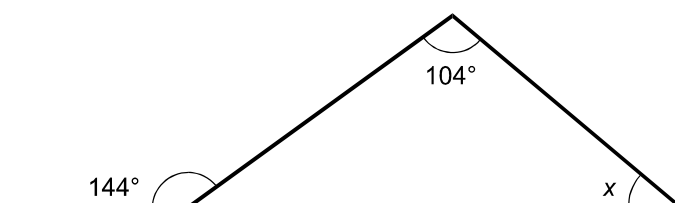
Del I # 3 (2/0) Bestäm vinkeln

Ma2

3.



- a) Bestäm vinkeln x (1/0)
- b) Vilket eller vilka av följande geometriska samband använde du då du bestämde vinkeln x ? *Endast svar fordras* (1/0)
- A Pythagoras sats
 - B Vinkelsumman i en triangel är 180°
 - C Summan av sidovinklar är 180°
 - D Yttervinkelsatsen
 - E Topptriangelsatsen
 - F Randvinkelsatsen

a) Bestäm vinkeln x .

1:a varianten: yttervinkelsatsen ger

$$144^\circ = 104^\circ + \underbrace{x}_{x=40^\circ}$$

2:a varianten: vinkelsumman i en triangel är 180°

$$180^\circ = \underbrace{(180^\circ - 144^\circ)}_{\text{summan av sidovinklar}} + 104^\circ + \underbrace{x}_{x=40^\circ}$$

Svar a) Vinkeln är 40°

b) Vilket eller vilka av följande geometriska samband använde du då du bestämde vinkeln x ?

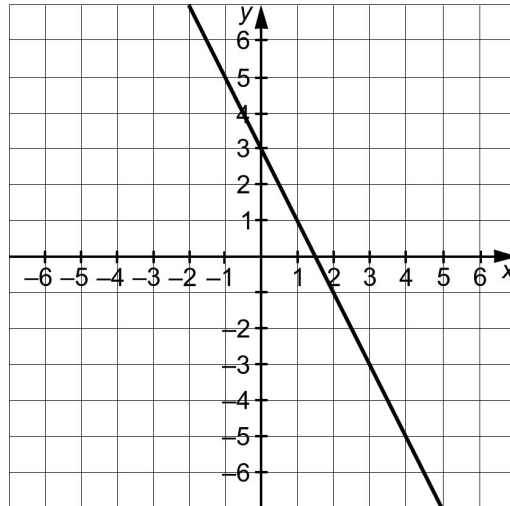
Svar b)

- | | | |
|---|---|----------------------|
| A | Pythagoras sats | NEJ |
| B | Vinkelsumman i en triangel är 180° | JA tillsammans med C |
| C | Summan av sidovinklar är 180° | JA tillsammans med B |
| D | Ytternvinkelsatsen | JA ensam |
| E | Topptriangelsatsen | NEJ |
| F | Randvinkelsatsen | NEJ |

Del I # 4 (3/0) Räta linjen

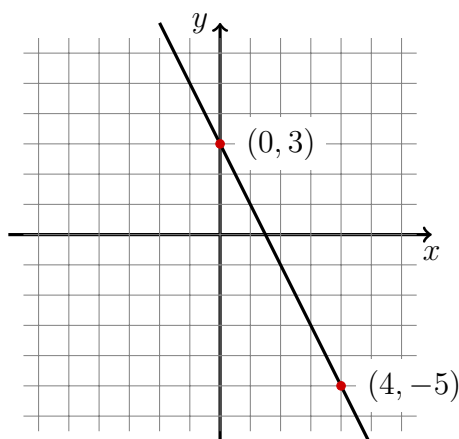
Ma2

4.



- a) Bestäm ekvationen för linjen som är inritad i koordinatsystemet.
Endast svar fordras (1/0)
- b) Avgör om punkten $(-4, 11)$ ligger på linjen. (1/0)
- c) Rita ett koordinatsystem och rita in en linje som har riktningskoefficienten $k = \frac{3}{4}$
Endast svar fordras (1/0)

- a) Bestäm ekvationen för linjen som är inritad i koordinatsystemet.



Använd FORMELSAMLINGEN ekvationen för rät linje.

Räta linjen

$$y = kx + m \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Andragsgradsfunktioner

$$y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

Då $x = 0$ är $y = m$. Enligt figuren gäller att när $x = 0$ är $y = 3$, alltså har vi $y = kx + 3$. Återstår att bestämma k . Enligt FORMELSAMLINGEN gäller

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Med punkterna $(0, 3)$ och $(4, -5)$ får vi

$$k = \frac{-5 - 3}{4 - 0} = -2$$

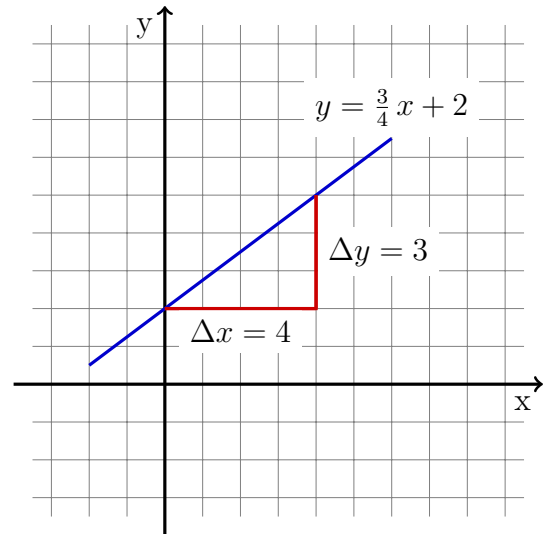
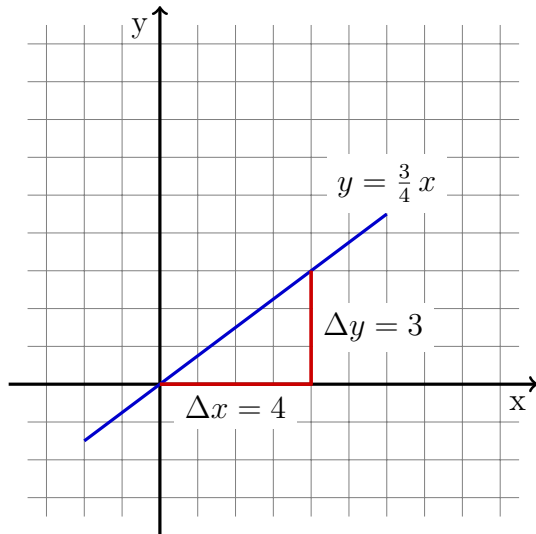
Svar a) $y = -2x + 3$

- b) Avgör om punkten $(-4, 11)$ ligger på linjen. Stoppa in $x = -4$ i linjens ekvationen

$$\underbrace{y}_{y=11} = -2 \overbrace{x}^{x=-4} + 3 \quad \text{det stämmer!}$$

Svar b) Punkten $(-4, 11)$ ligger på linjen.

c) Det finns många linjer som har riktningskoefficienten $\frac{3}{4}$.



Svar c) Se någon av figurerna ovan

Del I # 5 (2/0) Linjärt ekvationssystem

Ma2

5. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2y + 2x = 16 \\ y - 2 = 2x \end{cases}$	(2/0)
--	-------

Uppgiften är att lösa ekvationssystemet

$$\begin{array}{rclcl} 2y & + & 2x & = & 16 & \text{1:a ekvationen} \\ y & - & 2 & = & 2x & \text{2:a ekvationen} \end{array}$$

De två ekvationerna är uppställda på ett rörigt sätt, x finns på både vänster och höger sida om likhetstecknet. Börja med att städa upp. Samla okända, x och y , på vänster sida och konstanta tal på höger sida om likhetstecknet.

$$\begin{array}{rclcl} 2x & + & 2y & = & 16 & \text{1:a ekvationen} \\ -2x & + & y & = & 2 & \text{2:a ekvationen} \end{array}$$

Strategi: Behåll 1:a ekvationen och eliminera (ta bort) koefficienten (talet) framför x i andra ekvationen. Addera 1:a ekvationen till 2:a ekvationen. Vi får då:

$$\begin{array}{rclcl} 2x & + & 2y & = & 16 & \text{1:a ekvationen} \\ -2x + 2x & + & y + 2y & = & 2 + 16 & \text{ny 2:a ekvation innehåller bara } y \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} 2x & + & 2y & = & 16 & \text{1:a ekvationen} \\ & & 3y & = & 18 & \text{Lös } y \text{ som blir } y=6 \end{array}$$

Ekvationssystemet är nu *triangulärt*. Lös ekvationerna nerifrån och upp, *bakåtsubstitution*.

$$\begin{array}{rclcl} 2x & + & 2y & = & 16 & \text{Lös } x, \text{ med } y=6 \text{ blir } x=2 \\ & & 3y & = & 18 & y=6 \end{array}$$

Svar $x=2$ $y=6$.

Kommentar Metoden som används ovan kallas *triangulering och bakåtsubstitution* och är ett systematiskt sätt att hitta lösningar till system av linjära ekvationer. För ett problem som detta med två obekanta behövs knappast någon systematisk metod. För stora problem med 10-tals, 100-tals eller 1000-tals obekanta behövs dock en systematisk metod. Redan problem med 3 obekanta kräver en systematisk metod. Stora problem kan naturligtvis inte hanteras med räkning för hand utan kräver dator. Professionella program för att lösa linjära ekvationssystem är Matlab (dyr licens) eller Octave (fritt) som båda använder *triangulering och bakåtsubstitution*.

Del I # 6 (2/0) Lös olikhet

Ma1

6. a) Lös olikheten $3x + 13 < 7$ (1/0)b) Vilket eller vilka av följande x -värden uppfyller olikheten $3x + 13 < 7$?
Endast svar fordras (1/0)A -7 B -6 C -2 D 2 E 6 F 7

a) För olikheter gäller att du kan

- addera eller subtrahera ett tal från bägge sidor i en olikhet
- multiplicera eller dividera bägge sidor i en olikhet med ett tal > 0 .
- vid multiplikation eller division med ett negativt tal vänds olikheten.
Alltså om $a < b$ så är $-a > -b$.

$$3x + 13 < 7$$

$$3x + 13 - 13 < 7 - 13 \quad \text{subtrahera 13 från bägge sidor}$$

$$3x < -6$$

$$x < -2 \quad \text{dividera bägge sidor med 3}$$

Svar a) $x < -2$.

b) Kontrollera alternativen A – F.

	x	$3x + 13 < 7$		Falskt/Sant
A	-7	$-21 + 13 < 7$	$-8 < 7$	SANT
B	-6	$-18 + 13 < 7$	$-5 < 7$	SANT
C	-2	$-6 + 13 < 7$	$7 < 7$	FALSKT
D	2	$6 + 13 < 7$	$19 < 7$	FALSKT
E	6	$18 + 13 < 7$	$31 < 7$	FALSKT
F	7	$21 + 13 < 7$	$34 < 7$	FALSKT

Svar b) Alternativen A och B är uppfyllda.

Del I # 7 (0/2) Två tärningar

Ma1

7. Du är med i ett lekprogram på TV och kan vinna 1000 kronor på ett tärningsspel.

Spelet går till så här, programledaren kastar två tärningar som du inte ser. Du ska sedan gissa hur många prickar som tärningarna visar tillsammans.



Om du gissar rätt vinner du 1000 kronor.

Hur många prickar ska du gissa på för att ha så stor sannolikhet som möjligt att vinna? Motivera varför.

(0/2)

Vilket är det sannolikaste utfallet vid tärningskast med två sexsidiga tärningar. Av de två tabellerna framgår att 7 är det sannolikaste utfallet.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

totalt	kombinationer					
1	—					
2	1+1					
3	1+2	2+1				
4	1+3	2+2	3+1			
5	1+4	2+3	3+2	4+1		
6	1+5	2+4	3+3	4+2	5+1	
⇒7	1+6	2+5	3+4	4+3	5+2	6+1
8		2+6	3+5	4+4	5+3	6+2
9			3+6	4+5	5+4	6+3
10				4+6	5+5	6+4
11					5+6	6+5
12						6+6
13	—					

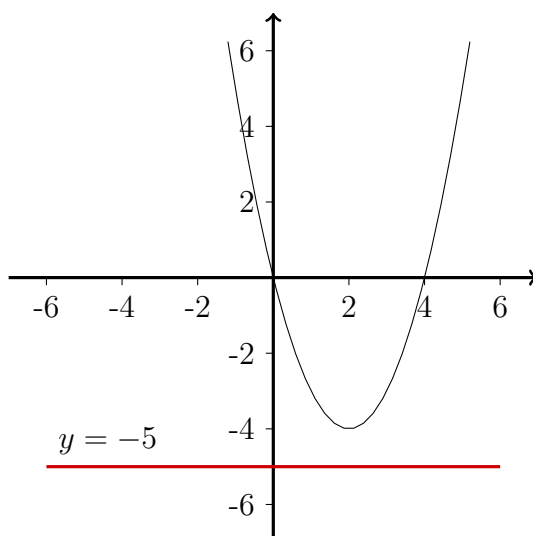
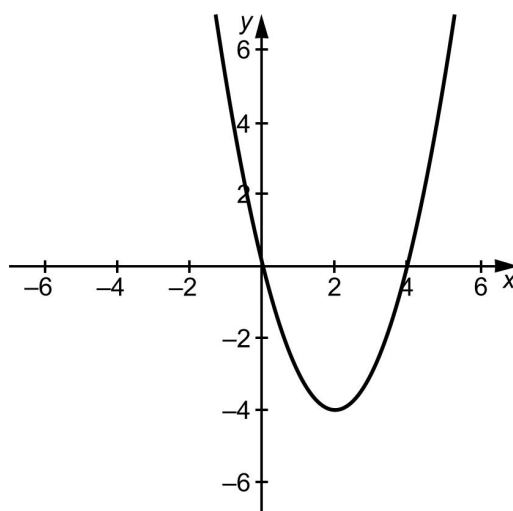
Svar 7 är det mest sannolika utfallet.

Del I # 8 (0/1) Ge ekvationen för en linje

8. Ge ekvationen för en rät linje som *aldrig* skär grafen till funktionen $y = x^2 - 4x$

Endast svar fordras

(0/1)



Det finns naturligtvis många linjer som inte skär grafen till $y = x^2 - 4x$. En rät linje som *aldrig* skär grafen är $y = -5$.

Svar Linjen $y = -5$ skär aldrig grafen.

Kommentar Villkoret för att linjen $y = kx + m$ ska skära grafen till $y = x^2 - 4x$ är att ekvationen $kx + m = x^2 - 4x$ har (reella) lösningar. Rötterna till $x^2 - (4+k)x - m = 0$ är $x_{1,2} = (2 + \frac{k}{2}) \pm \sqrt{(2 + \frac{k}{2})^2 + m}$ som saknar lösning då $(2 + \frac{k}{2})^2 + m < 0$.

Del II # 9 (2/0) Förenkla

9. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt

a) $(x-4)^2 - 16$ *Endast svar fordras* (1/0)

b) $x(2x+5) - 2(3+x)$ *Endast svar fordras* (1/0)

a) Använd FORMELSAMLINGEN, där finns 2:a kvadreringsregeln.

Regler

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Andragradsekvationer

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

2:a kvadreringsregeln ger

$$\underbrace{(x-4)^2}_{x^2-8x+16} - 16 = x^2 - 8x$$

Svar a) $x^2 - 8x$ alternativt $(x-8) \cdot x$.

b)

$$\underbrace{x(2x+5)}_{2x^2+5x} - \underbrace{2(3+x)}_{6+2x} = 2x^2 + 3x - 6$$

Svar b) $2x^2 + 3x - 6$

Del II # 10 (2/1) Sannolikhet

Ma1

- 10.** Det svenska damlandslaget i fotboll gjorde succé i oktober 2003 genom att ta silver i VM. Av truppens 20 spelare kom 6 från Umeå IK, lika många från Malmö FF och övriga från fyra andra klubbar.

Vid ett tillfälle under VM skulle två spelare slumpmässigt plockas ut till ett dopingtest.

- a) Hur stor var sannolikheten att den första spelaren som skulle dopingtestas kom från Umeå IK? *Endast svar fordras* (1/0)
- b) Hur stor var sannolikheten att båda spelarna som skulle dopingtestas kom från Umeå IK? (1/1)

- a) Sannolikhet att första spelaren kommer från Umeå IK är

$$\frac{\text{antal spelare från Umeå IK}}{\text{totala antalet spelare}} = \frac{6}{20} = 0,3$$

Svar a) 0,3 alternativt $\frac{3}{10}$ alternativt 30%.

- b) Sannolikheten att första spelaren kommer från Umeå IK är $\frac{6}{20}$. När första spelaren är utplockad återstår 19 spelare varav 5 är från Umeå IK. Sannolikheten att andra spelaren kommer från Umeå IK är

$$\frac{\text{antal kvarvarande spelare från Umeå IK}}{\text{totala antalet kvarvarande spelare}} = \frac{5}{19}$$

Sannolikheten båda spelarna kommer från Umeå IK är

$$\frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} = 0,0789 \approx 8\%$$

Svar b) 0,08 alternativt 8%.

Del II # 11 (4/0) Linjärt ekvationssystem, godis

- 11.** Patrik ska handla lösviktsgodis till sin mamma Ellen. Hon säger till Patrik att hon vill ha 5 hg godis och skickar med honom 30 kronor att handla för.

I godisaffären finns två olika priser på lösviktsgodis. Det dyrare godiset kostar 7,90 kr/hg och det billigare 4,90 kr/hg.

Patrik frågar sig: Är det möjligt att handla precis 5 hg godis för 30 kronor?

Efter en stunds funderande kommer han på ett sätt att räkna ut det och ställer upp ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 4,90x + 7,90y = 30 \end{cases}$$

- a) Förklara vad x och y betyder i ekvationssystemet. *Endast svar fordras* (1/0)
- b) Välj en av ekvationerna i ekvationssystemet och förklara vad ekvationen beskriver. *Endast svar fordras* (1/0)
- c) Lös ekvationssystemet och besvara sedan Patriks fråga ovan. (2/0)

Svar a) x betyder vikt av billigt godis och y betyder vikt av dyrt godis.

Svar b) Första ekvationen betyder att totala vikten av billigt och dyrt godis ska vara 5 hekto. Andra ekvationen betyder att priset av billigt och dyrt godis ska vara 30 kronor.

c) Ekvationerna som ska lösas är

$$\begin{array}{rclcl} x & + & y & = & 5 & \text{1:a ekvationen} \\ 4,90x & + & 7,90y & = & 30 & \text{2:a ekvationen} \end{array}$$

Strategi: Behåll 1:a ekvationen och eliminera (ta bort) koefficienten (talet) framför x i andra ekvationen. Subtrahera $4,9 \times$ 1:a ekvationen från 2:a ekvationen. Vi får då:

$$\begin{array}{rclcl} x & + & y & = & 5 & \text{1:a ekvationen} \\ 4,90x - 4,90x & + & 7,90y - 4,90y & = & 30 - 4,90 \cdot 5 & \text{ny 2:a ekvation innehåller bara } y \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} x & + & y & = & 5 & \text{1:a ekvationen} \\ & & 3,00y & = & 5,50 & \text{2:a ekvationen ger } y = \frac{5,50}{3} \end{array}$$

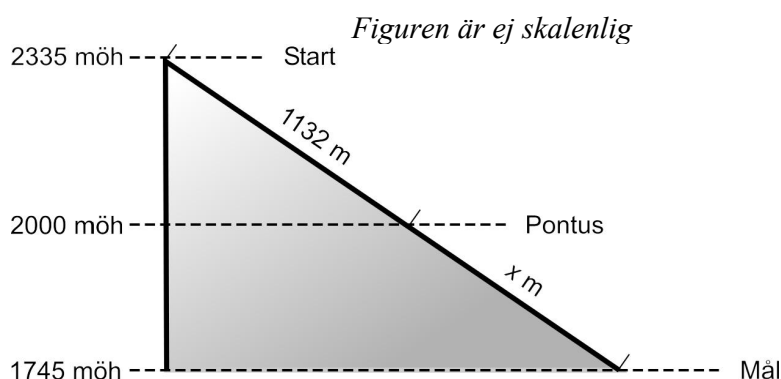
$$\begin{array}{rclcl} x & + & y & = & 5 & \text{med } y = \frac{5,50}{3} = 1,83 \text{ blir } x = 3,17 \\ & & 3,00y & = & 5,50 \end{array}$$

Svar c) 3,17 hekto billigt godis och 1,83 hekto dyrt godis.

Del II # 12 (0/2) Likformighet

Ma2

12. I alpina VM 2005 vann Anja Pärson tävlingen i Super-G i en bana som förenklat kan beskrivas av figuren nedan. Banan startar på höjden 2335 meter över havet (möh) och har en fallhöjd på 590 meter.



Pontus står vid en liftstation en bit upp i banan och tittar på tävlingen. Hans höjdmätare visar att han är på 2000 meters höjd över havet. På en skylt vid liftstationen står det att liften går 1132 meter upp till startområdet, se figuren.

Hur långt har tävlingsåkarna kvar att åka ner till målet när de passerar Pontus? (0/2)

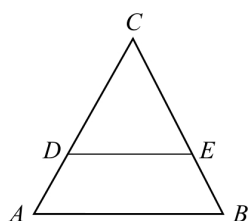
Använd FORMELSAMLINGEN där finns topptriangelnsatsen och transversalsatsen.

Topptriangel- och transversalsatsen

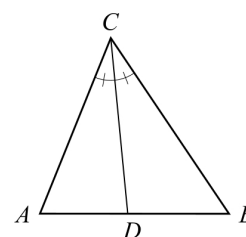
Om DE är parallell med AB gäller

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{CE}{BC} \text{ och}$$

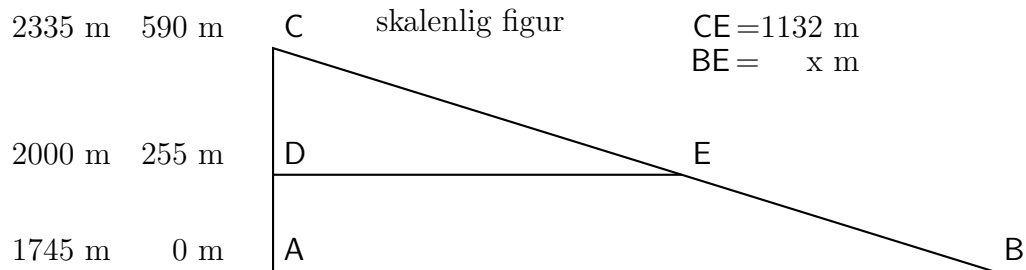
$$\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$$

**Bisektrissatsen**

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$



Inför beteckningar (A, B, C, D och E) enligt figuren nedan.



Använd transversalsatsen

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$$

ger

$$\frac{590 - 255}{255} = \frac{1132}{x}$$
$$x = 1132 \cdot \frac{255}{590 - 255} = 861,67 \approx 862$$

Svar 862 m.

Kommentar Det finns flera olika varianter på lösning som ger rätt svar.

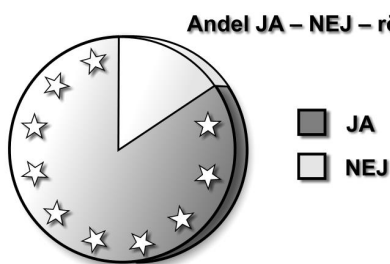
Kommentar Indata är givna som hela meter. Då är det lämpligt att svara med hela meter.

Del II # 13 (0/2) Röstning och bortfall

- 13.** I april 2003 röstade medborgarna i Ungern om medlemskap i EU. Vid sammanräkningen av rösterna visade det sig att 84 % röstade *Ja* till medlemskap i EU samt att 45 % av de röstberättigade deltog i valet.

Undersök mellan vilka procenttal andelen *Ja*-röster skulle kunna ligga om samtliga röstberättigade hade deltagit i valet.

(0/2)



45% av befolkningen har röstat. Av dessa 45% har 84% röstat JA. Totalt av befolkningen har $0,45 \times 0,84 = 0,378$ röstat JA. Detta är det minsta antalet tänkbara JA-röster. Om alla 55% som avstod att rösta valde JA blir andelen JA-röster $0,378 + 0,55 = 0,928$.

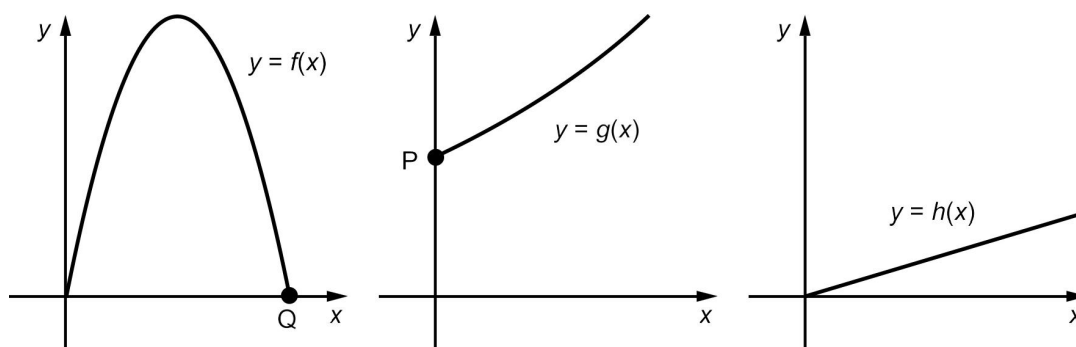
Svar Antalet JA-röster kan vara från lägst 37,8% till högst 92,8%.

Kommentar Ett alternativt sätt att lösa problemet på är att konstatera att $100 - 84 = 16\%$ av de röstande valt NEJ. Dessa utgör andelen $0,45 \times 0,16 = 0,072$ av befolkningen. Om hela övriga befolkningen röstar JA så blir andelen JA-röster $1,00 - 0,072 = 0,928$.

Del II # 14 (3/2/⊗) Grafer

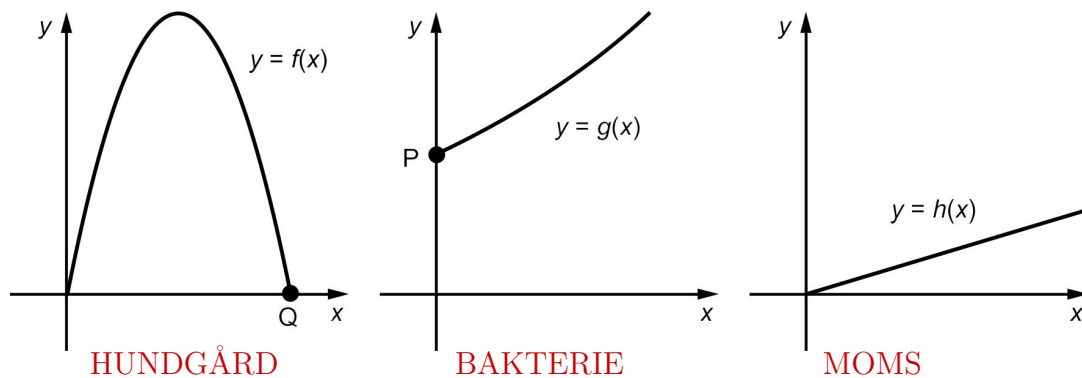
14. Var och en av situationerna I, II och III nedan passar in på var sin graf i figuren.

- I** För många varor gäller att momsen motsvarar 20 % av varans pris.
Momsens storlek är en funktion av varans pris.
- II** Du ska bygga en rektangulär hundgård med 40 m stängsel.
Hundgårdens area är en funktion av hundgårdens längd.
- III** Från början finns det 50 bakterier i en odling. Varje timme ökar antalet bakterier med 20 %.
Antalet bakterier är en funktion av tiden.



- a) Kombinera ihop situationerna I, II och III med funktionerna f , g och h .
Endast svar fordras (2/0)
- b) Vilket y -värde ska stå vid punkten P? Endast svar fordras (1/0)
- c) Vilket x -värde ska stå vid punkten Q? Endast svar fordras (0/1)
- d) Ställ upp y som en funktion av x för situation II. (0/1/⊗)

Svar a) Rätta kombinationer är



Svar b) Det ska stå 50 vid punkten P då det från början fanns 50 bakterier i odlingen.

Svar c) Det ska stå 20 vid punkten Q.

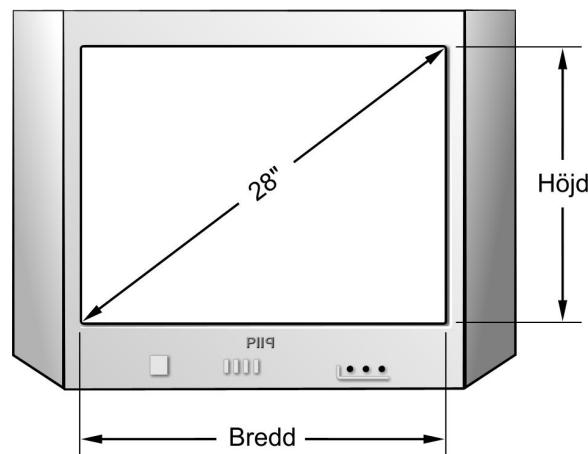
d) Den rektangulära hundgården har en sida som är x meter och en sida som är z meter. Hundgårdens omkrets är $x + z + x + z = 40$ meter. Detta ger $2x + 2z = 40$ eller förenklat $z = 20 - x$. Arean $y = x \cdot z = x(20 - x)$.

Svar d) $y = x(20 - x)$.

Del II # 15 (0/3/⊗) Bildformat

15. De två vanligaste bildformaten för en tv-apparat är *standardformat* och *bredbildsformat* (*wide-screen*). För att beskriva storleken på en tv-apparat används längden av bildskärmens diagonal mätt i tum, se figur. En tum är ungefär 2,54 centimeter.

Exempel: Ett vanligt format på en tv är 28" (28 tum).



En tv i *standardformat* har en bildskärm där bredden är $\frac{4}{3}$ av höjden.

En tv i *bredbildsformat* har en bildskärm där bredden är $\frac{16}{9}$ av höjden.

Utgå från två tv-apparater som båda har samma storlek, dvs. bildskärmens diagonal är lika stor för båda apparaterna, men där den ena är i standardformat och den andra i bredbildsformat.

Bestäm vilket format som ger den största bildskärmsarean.

(0/3/⊗)

Enligt Pythagoras gäller

$$\text{höjd}^2 + \text{bredd}^2 = \text{diagonal}^2$$

Enligt uppgiften gäller att

$$\text{bildformat} = \frac{\text{bredd}}{\text{höjd}}$$

vilket ger

$$\text{bredd} = \text{bildformat} \times \text{höjd}$$

och med Pythagoras enligt ovan får vi

$$\text{höjd}^2 + \text{bildformat}^2 \times \text{höjd}^2 = \text{diagonal}^2$$

$$\text{höjd}^2 = \frac{\text{diagonal}^2}{1 + \text{bildformat}^2}.$$

Bildens area är

$$\text{area} = \text{bredd} \times \text{höjd}$$

$$\text{area} = \text{bildformat} \times \text{höjd} \times \text{höjd}$$

$$\text{area} = \text{bildformat} \times \frac{\text{diagonal}^2}{1 + \text{bildformat}^2} = \text{diagonal}^2 \times \frac{\text{bildformat}}{1 + \text{bildformat}^2}.$$

I bråket förkommer **bildformat** linjärt i täljaren kvadratisk i nämnaren. Detta betyder att **area** minskar när **bildformat** ökar ($\text{bildformat} > 1$). En bredare bild ger ett större värde på **bildformat** och därmed en mindre bildyta, **area**, under förutsättning att diagonalen är konstant. Med formatet $\frac{4}{3}$ blir ytan 48% och med formatet $\frac{16}{9}$ blir ytan 43% av diagonalmåttet i kvadrat. Notera att uppgiften 28 tum inte påverkar resonemanget. (Formatet $\frac{1}{1}$ ger största bildytan men detta hör inte till uppgiften.)

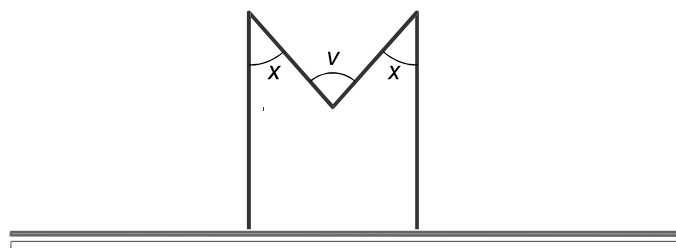
Svar Standardformatet $\frac{4}{3}$ ger största bildytan för ett givet mått på bildytans diagonal.

Del II # 16 (0/2/⊗) Geometriskt bevis

16. Figuren visar bokstaven M stående på ett horisontellt underlag. De två lika långa "stödbenen" är lodräta.

Visa att $v = 2x$

(0/2/⊗)



Använd FORMELSAMLINGEN där finns hjälp med ord som sidovinklar, vertikalvinklar, likbelägna vinklar och alternatvinklar.

Vinklar

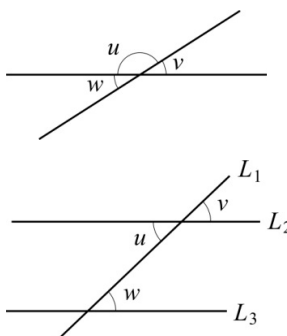
$u + v = 180^\circ$ Sidovinklar

$w = v$ Vertikalvinklar

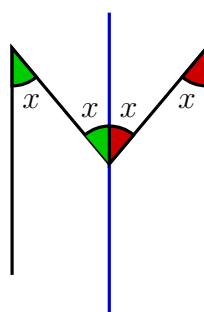
L_1 skär två parallella linjer L_2 och L_3

$v = w$ Likbelägna vinklar

$u = w$ Alternatvinklar



Drag en lodrät linje mitt emellan de två parallella "stödbenen".



Vi får två par av alternatvinklar. Av figuren framgår att $v = 2x$.

Vilket skulle visas.

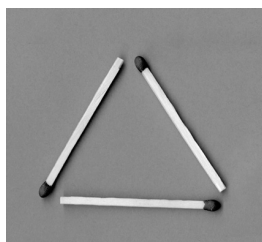
Del II # 17 (3/4/⊗) Tändstickor och formler

Ma1

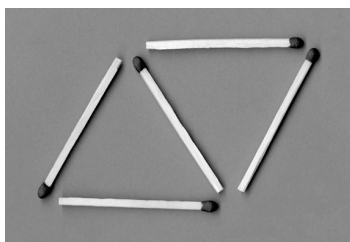
Vid bedömningen av ditt arbete med följande uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:

- Hur väl du genomför dina beräkningar
- Hur väl du redovisar och kommenterar ditt arbete
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Vilka matematiska kunskaper du visar
- Hur väl du använder det matematiska språket
- Hur generell din lösning är

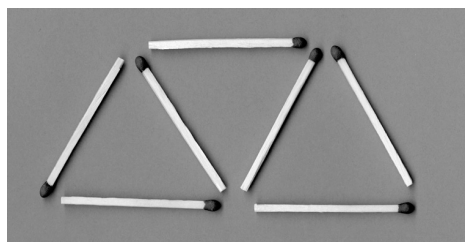
17. Den här uppgiften handlar om att bilda figurer med tändstickor. Det gäller att koppla ihop några enkla regelbundna månghörningar efter varandra till en rad. Exempelen nedan visar hur det går till för regelbundna trehörningar och fyrehörningar.



Av 3 tändstickor kan man bilda 1 triangel.



Av 5 tändstickor kan man bilda 2 trianglar.



Av 7 tändstickor kan man bilda 3 trianglar lagda på rad.

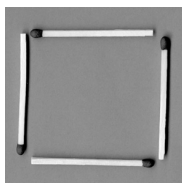
Det går att hitta ett samband mellan antal tändstickor och antalet ihopkopplade trianglar om dessa kopplas ihop till en rad på det sätt som visas i bilderna.

I tabellen nedan är x antalet tändstickor och y antalet ihopkopplade trianglar.

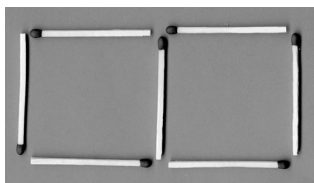
x	y
3	1
5	2
7	3
..	..

- Rita in punkterna i ett koordinatsystem. Punkterna ligger på en rät linje. Bestäm linjens ekvation på formen $y = kx + m$.
- Hur många trianglar kan bildas av 20 tändstickor om du kopplar ihop trianglarna som i bilderna ovan? Kommentera ditt svar och dra en slutsats om antalet tändstickor som krävs för att bilda en rad av trianglar på detta sätt.

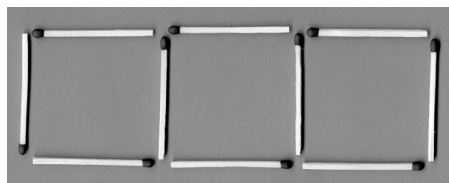
- Vad händer om du istället lägger en rad av fyrhörningar på samma sätt som i bilderna nedan? Ange och beskriv ett samband mellan antalet tändstickor och antalet ihopkopplade fyrhörningar.



En fyrhörning.



Två fyrhörningar.



Tre fyrhörningar lagda på rad.

- En månghörning kallas ibland för n -hörning, där n är ett positivt heltal som anger antalet hörn. Tänk dig nu att du lägger en rad av en viss sorts n -hörningar som kopplas ihop på samma sätt som tidigare.

Försök finna sambandet mellan antalet tändstickor och antalet ihopkopplade n -hörningar. Beskriv detta samband med ord och en formel. Motivera att ditt samband gäller för alla n -hörningar.

(3/4/□)

Uppgiften består av bakgrundsinformation och fyra deluppgifter.

1:a deluppgiften: rita in punkterna i ett koordinatsystem.

Punkterna ligger på en rät linje. Bestäm linjens ekvation på formen $y = kx + m$. Använd FORMELSAMLINGEN.

Räta linjen

$$y = kx + m \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Andragradsfunktioner

$$y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

Enligt FORMELSAMLINGEN gäller

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Välj två punkter ur tabellen. Vi väljer de två första

$$k = \frac{2 - 1}{5 - 3} = \frac{1}{2}.$$

Vi har nu

$$y = \frac{1}{2}x + m.$$

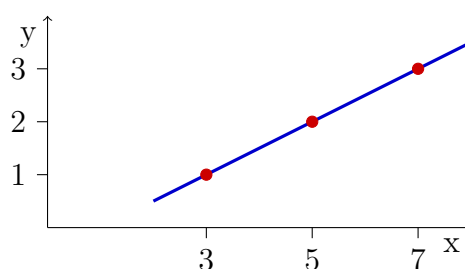
Bestäm m . Välj en punkt i tabellen, exempelvis $x = 5$ och $y = 2$. Stoppa in $x = 5$ och $y = 2$ i linjens ekvation

$$\underbrace{y}_{y=2} = \frac{1}{2} \underbrace{x}_{x=5} + \underbrace{m}_{m=-\frac{1}{2}}$$

ut trillar $m = -\frac{1}{2}$. Linjens ekvation blir

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Rita punkterna och linjen i ett koordinatsystem.



Svar 1:a deluppgiften Linjens ekvation blir $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

2:a deluppgiften: hur många trianglar kan bildas av 20 tändstickor

Använd formeln $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ med $x = 20$. Vi får då $y = 9,5$ men eftersom det inte finns halva trianglar är svaret 9 trianglar. Du får absolut inte använda matematikens regler för avrundning här.

Svar 2:a deluppgiften 9 hela trianglar.

3:e och 4:e deluppgiften

Varje gång vi utökar ett antal n -hörningar med ytterligare en n -hörning krävs $n - 1$ tändstickor eftersom vi utnyttjar en tändsticka av de tidigare lagda stickorna. En ökning av antalet tändstickor x med $n - 1$ ska alltså ge en ökning av antalet n -hörningar y med 1 enhet. Vi kan då skriva upp formeln

$$y = \frac{x}{n-1} + m$$

där m är okänd. För att bestäma m konstaterar vi att då $x = n$ är $y = 1$ vilket ger

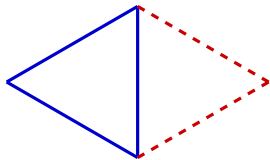
$m = \frac{-1}{n-1}$. Det sökta sambandet är

$$y = \frac{x}{n-1} - \frac{1}{n-1}.$$

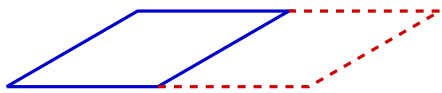
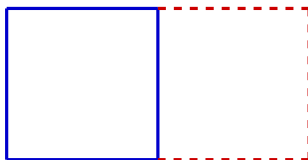
Svar 3:e deluppgiften För fyrhörningen gäller att $n = 4$ vilket ger $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$

Svar 4:e deluppgiften För n -hörningen gäller $y = \frac{x}{n-1} - \frac{1}{n-1}$

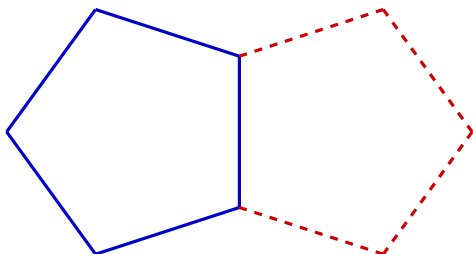
3-hörning (triangel) utökas med 2 sidor



4-hörning utökas med 3 sidor, gäller också icke symmetriska 4-hörningar



5-hörning utökas med 4 sidor, gäller också icke symmetriska 5-hörningar



6-hörning utökas med 5 sidor, gäller också icke symmetriska 6-hörningar

