

# Innehåll

|                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Förord</b>                                             | <b>2</b>  |
| <b>NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS B HÖSTEN 2007</b> | <b>2</b>  |
| <b>NpMaB HT 2007 LÖSNINGAR</b>                            | <b>3</b>  |
| <b>Del I: Digitala verktyg är INTE tillåtna</b>           | <b>3</b>  |
| Del 1 # 1 (2/0) Lös ekvationerna . . . . .                | 3         |
| Del 1 # 2 (1/0) Startordning . . . . .                    | 4         |
| Del 1 # 3 (2/0) Linjärt ekvationssystem . . . . .         | 5         |
| Del 1 # 4 (1/2) Förenkla så långt som möjligt . . . . .   | 6         |
| Del 1 # 5 (1/1) Tre linjer . . . . .                      | 8         |
| Del 1 # 6 (0/1) Inkast eller frispark . . . . .           | 9         |
| Del 1 # 7 (0/1) Olika . . . . .                           | 10        |
| Del 1 # 8 (0/2/⊗) Triangel . . . . .                      | 12        |
| <b>Del II: Digitala verktyg är tillåtna</b>               | <b>13</b> |
| Del 1 # 9 (2/0) Linje genom punkter . . . . .             | 13        |
| Del 1 # 10 (3/2) Termos . . . . .                         | 14        |
| Del 2 # 11 (4/0) Mast med linor . . . . .                 | 16        |
| Del 2 # 12 (1/1) Skidhandskar . . . . .                   | 17        |
| Del 2 # 13 (1/1) Triangel i cirkel . . . . .              | 18        |
| Del 2 # 14 (1/2) Golfbollar . . . . .                     | 20        |
| Del 2 # 15 (1/1/⊗) Medelvärde och median . . . . .        | 21        |
| Del 2 # 16 (0/3/⊗) Liksidig triangel . . . . .            | 22        |
| Del 2 # 17 (2/4/⊗) Dela lika . . . . .                    | 23        |

## Förord

Skolverket har endast publicerat *ett* kursprov till kursen Ma 2. Innehållet i den äldre kursen Ma B hör nu till Ma 1 och/eller Ma 2. I tabellen nedan framgår vilka uppgifter som är lämpliga till respektive kurs.

|        | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Ma 1   |   | 2 |   |   |   |   |   |   | 9 |    |    |    |    | 14 |    |    |    |
| Ma 2   | 1 |   | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |    |    |    |    | 16 | 17 |
| Ma 2bc | 1 |   | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |    | 15 | 16 | 17 |

Kom ihåg

- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan

- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

# NpMaB HT 2007 LÖSNINGAR

## Del I: Digitala verktyg är INTE tillåtna

### Del 1 # 1 (2/0) Lös ekvationerna

Ma2

1. a) Lös ekvationen  $x^2 - 6x + 5 = 0$  (2/0)
- b) Lös ekvationen  $3x^2 - 27 = 0$  (2/0)

a) Ekvationen är en 2:a gradsekvation. Lös ekvationen med pq-formeln som finns i FORMELSAMLINGEN.

#### Regler

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

#### Andragradsekvationer

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$0 = x^2 - \underbrace{6}_{p=-6} + \underbrace{5}_{q=5}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 1$$

Svar a)  $x_1 = 5$  och  $x_2 = 1$

b) Ekvationen är en enkel 2:a gradsekvation,

$$0 = 3x^2 - 27.$$

Normalisera ekvationen, dela alla termer med koefficienten framför  $x^2$ . Ekvationen blir

$$0 = x^2 - 9$$

som efter omskrivning blir

$$x^2 = 9$$

med lösningen

$$x_{1,2} = \pm 3$$

Svar b)  $x_1 = 3$  och  $x_2 = -3$ .

**Kommentar** Alla 2:a gradsekvationer kan lösas med pq-formeln men om en av  $p$  eller  $q$  saknas kan ekvationen lösas enklare utan pq-formel.

**Del 1 # 2 (1/0) Startordning**

2. Startordningen i skolans idolshow ska lottas och alla som ska uppträda står därför på scenen i skolans aula. Det är nio olika uppträdanden och Jenny har ett av dessa. Nio papperslappar med talen 1 till och med 9 (ett tal på varje lapp) ligger hopvikta i en hatt. Startordningen bestäms av talet på papperslappen. Jenny är den första att dra en lapp.

Hon vill helst inte vara den första som ska uppträda.

Vad är sannolikheten att Jenny inte behöver uppträda först?

*Endast svar fordras*

(1/0)

Alla lappar har samma sannolikhet. Sannolikheten att få ettan är  $\frac{1}{9}$ . Sannolikheten att inte få ettan är  $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

**Svar**  $\frac{8}{9}$

**Del 1 # 3 (2/0) Linjärt ekvationssystem**

Ma2

|           |                                                                               |       |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------|-------|
| <b>3.</b> | Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + 5y = 14 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$ | (2/0) |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------|-------|

Det finns två olika metoder för att lösa linjära ekvationssystem med flera obekanta. För ekvationssystem med bara två obekanta är det betydelselöst vilken metod du väljer. Substitutionsmetoden är enkel och fungerar utmärkt för två obekanta.

$$2x + 5y = 14 \quad (1)$$

$$3x + y = -5 \quad (2)$$

Skriv om ekvation (2) till

$$y = -5 - 3x \quad (3)$$

Substitutera  $y$  i ekvation (1) med hjälp av ekvation (3). Vi får

$$2x + 5(-5 - 3x) = 14$$

$$2x - 25 - 15x = 14$$

$$-13x = 39$$

$$x = -3 \quad (4)$$

Med ekvation (3) och (4) kan  $y$  beräknas.

$$y = -5 - 3 \cdot (-3)$$

$$y = 4$$

**Svar**  $x = -3$  och  $y = 4$

**Del 1 # 4 (1/2) Förenkla så långt som möjligt**

Ma2

**4.** Förenkla så långt som möjligt

a)  $(5x - 3)(x + 4) - 17x$  (1/0)

b)  $(x + 3)^2 - 3(3 + x)$  (1/0)

**a) variant 1**

$$\begin{aligned} & (5x - 3)(x + 4) - 17x \\ & \underbrace{5x \cdot (x + 4)}_{5x^2 + 20x} - \underbrace{3 \cdot (x + 4)}_{3x + 12} - 17x \\ & 5x^2 + 20x - 3x - 12 - 17x \\ & 5x^2 - 12 \end{aligned}$$

**a) variant 2**

$$\begin{aligned} & (5x - 3)(x + 4) - 17x \\ & \underbrace{(5x - 3) \cdot x}_{5x^2 - 3x} + \underbrace{(5x - 3) \cdot 4}_{20x - 12} - 17x \\ & 5x^2 - 3x + 20x - 12 - 17x \\ & 5x^2 - 12 \end{aligned}$$

**Svar a)**  $5x^2 - 12$

## b) variant 1

I FORMELSAMLINGEN finns 1:a kvadreringsregeln

| Regler                      | Andragradsekvationer                                         |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | $x^2 + px + q = 0$                                           |
| $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ |
| $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$    |                                                              |

$$\underbrace{(x+3)^2}_{x^2+6x+9} - \underbrace{3(3+x)}_{9+3x}$$

$$x^2 + 3x$$

## b) variant 2

Faktorisera ut  $(x+3)$

$$(x+3)^2 - 3(3+x)$$

$$(x+3)[(x+3) - 3]$$

$$(x+3)x$$

$$x^2 + 3x$$

Svar b)  $5x^2 + 3x$

## Del 1 # 5 (1/1) Tre linjer

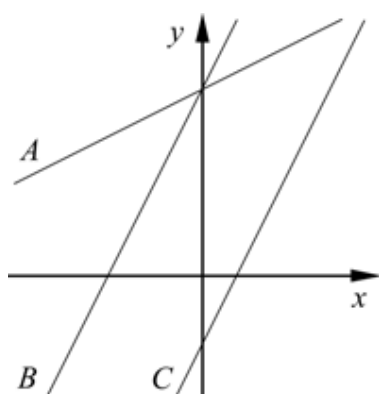
Ma2

5. Figuren visar tre linjer i ett koordinatsystem. Två av dessa är parallella.

En av linjerna i figuren har ekvationen  $y = 2x - 3$ . En annan linje har ekvationen  $y = 0,5x + 8$

a) Bestäm en ekvation för den tredje linjen. *Endast svar fordras* (1/0)

b) Motivera ditt svar i a) (0/1)



**Svar a)** Den tredje linjen har ekvationen  $y = 2x + 8$ .

**b)** Linje C har ekvationen

$$y = 2x - 3$$

eftersom linjen skär  $y$ -axeln där  $y = -3$  och endast en av linjerna skär negativa  $y$ -axeln. Linje B är parallell med C och har därför samma  $k$ -värde. Linje A skär  $y$ -axeln där  $y = 8$ . Linje A och B skär  $y$ -axeln i samma punkt, båda linjerna har alltså samma  $m$ -värde.

**Svar b)** Motiv se ovan.



## Del 1 # 6 (0/1) Inkast eller frispark

Ma2

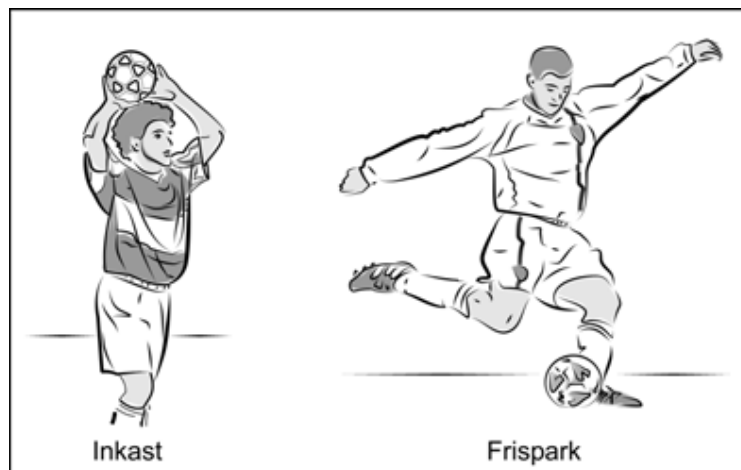
6. Fasta situationer i fotboll är till exempel frispark och inkast. Vid båda dessa tillfällen har spelet tillfälligt stannat upp och bollen ska åter sättas i spel. Vid en fast situation satte en spelare bollen i rörelse. Bollen följde därefter en bana som kan beskrivas med formeln

$$y = 2,0 + 0,62x - 0,043x^2$$

där  $y$  är höjden i meter över marken och  $x$  är avståndet i meter längs marken från den plats där spelaren befann sig.

Gjorde spelaren en frispark eller ett inkast? Motivera ditt svar.

(0/1)



Bollens bana är

$$\underbrace{y}_{y=2} = 2,0 + \overbrace{0,62x - 0,043x^2}^{x=0}$$

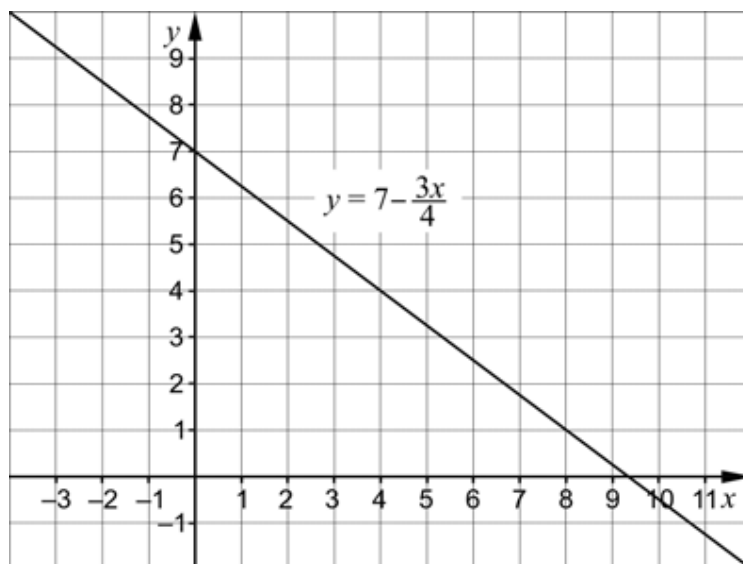
noll

**Svar** Inkast eftersom bollen startar på höjden 2 meter över marken.

## Del 1 # 7 (0/1) Olikhet

Ma2

7. I figuren nedan är linjen  $y = 7 - \frac{3x}{4}$  ritad.

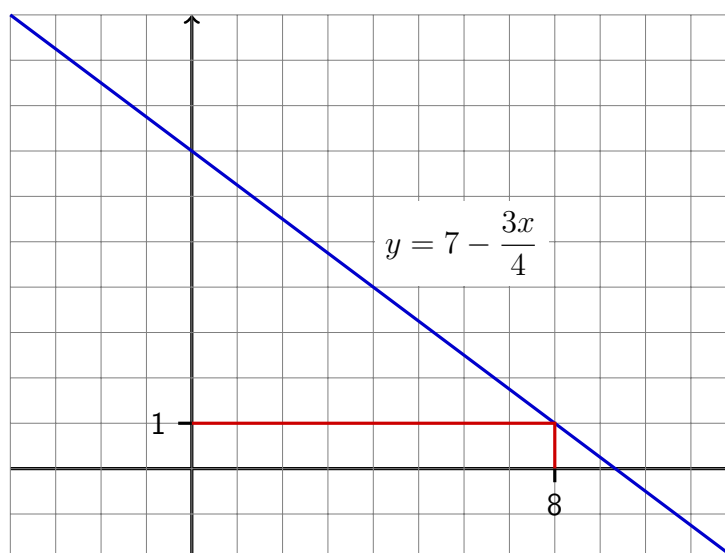


För vilka  $x$  gäller att  $7 - \frac{3x}{4} > 1$ ?

Endast svar fordras

(0/1)

**Grafisk lösning**, snabbast och enklast för detta problem



**Svar**  $x < 8$

### Algebraisk lösning

Vid räkning med olikheter är det tillåtet att addera eller subtrahera samma tal från bägge sidor i olikheten. Det är också tillåtet att multiplicera eller dividera bägge sidor i olikheten med ett *positivt* tal. Olikheten är

$$7 - \frac{3x}{4} > 1$$

Samla  $x$  på ena sidan om olikhetstecknet och tal på andra sidan.

$$6 - \frac{3x}{4} > 0$$

$$6 > \frac{3x}{4}$$

Multiplicera bägge sidor med 4.

$$6 \cdot 4 > 3x$$

Dividera bägge sidor med 3.

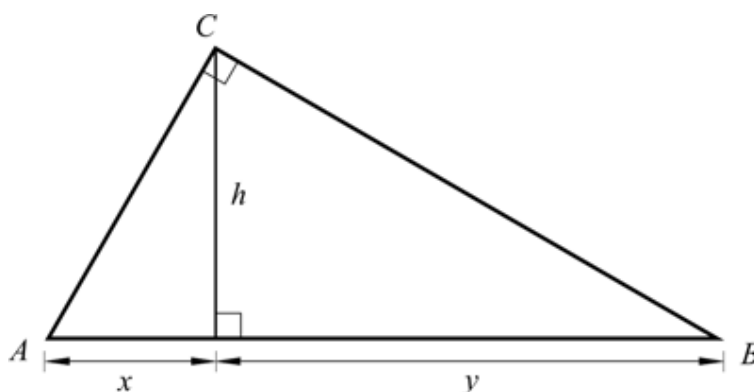
$$8 > x$$

**Svar**  $x < 8$

## Del 1 # 8 (0/2/⊗) Triangel

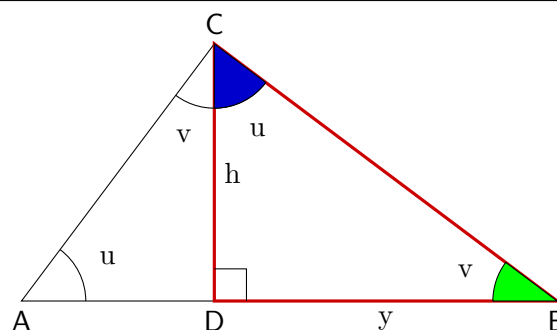
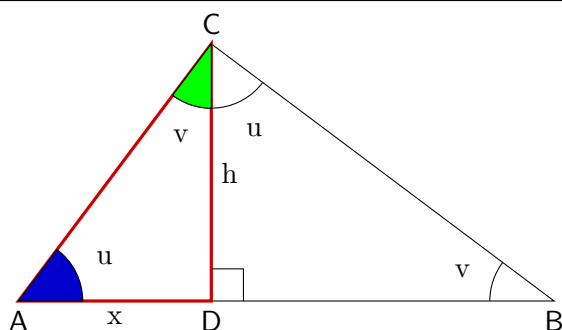
Ma2

8. I den rätvinkliga triangeln  $ABC$  dras höjden  $h$  mot hypotenusan  $AB$ . Höjden delar hypotenusan i två delar som i figuren betecknas med  $x$  och  $y$ .



Visa att  $h = \sqrt{x \cdot y}$

(0/2/⊗)



Vinklarna  $u$  och  $v$  är varandras komplementvinkel<sup>1</sup> då  $u + v = \angle ACB = 90^\circ$ . Triangelarna  $ACD$  och  $CBD$  är likformiga då vinklarna i båda triangelarna är  $u$ ,  $v$  och  $90^\circ$ . Två triangelar är likformiga om två vinklar är lika. Likformigheten ger

$$\frac{h}{y} = \frac{x}{h}$$

som efter omskrivning ger

$$h^2 = x \cdot y$$

$$h = \sqrt{x \cdot y}$$

vilket skulle visas.

<sup>1</sup>En vinkel  $u$  är komplementvinkel till  $v$  när  $u + v = 90^\circ$ . En vinkel  $u$  är supplementtvinkel till  $v$  när  $u + v = 180^\circ$ .

## Del II: Digitala verktyg är tillåtna

### Del 1 # 9 (2/0) Linje genom punkter

Ma2

9. En rät linje går genom punkterna (0, 3) och (2, 7)

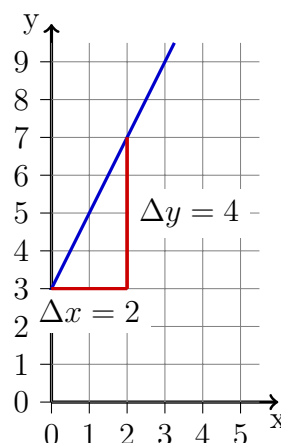
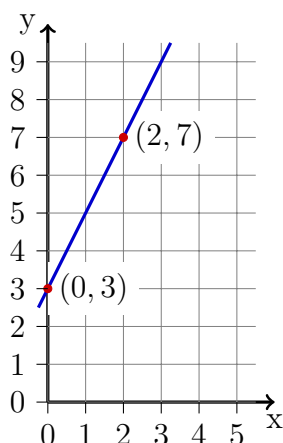
a) Rita linjen i ett koordinatsystem. (1/0)

b) Bestäm linjens ekvation.

*Endast svar fordras*

(1/0)

Svar a) Vänster figur



b) I FORMELSAMLINGEN finns ekvationen för räta linjen.

#### Räta linjen

$$y = kx + m \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

#### Andragradsfunktioner

$$y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

$$k = \frac{4}{2} = 2$$

Linjen går genom punkten (0, 3).

$$\underbrace{y}_{y=2} = \underbrace{k}_{k=2} \underbrace{x}_{x=0} + \underbrace{m}_{m=3}$$

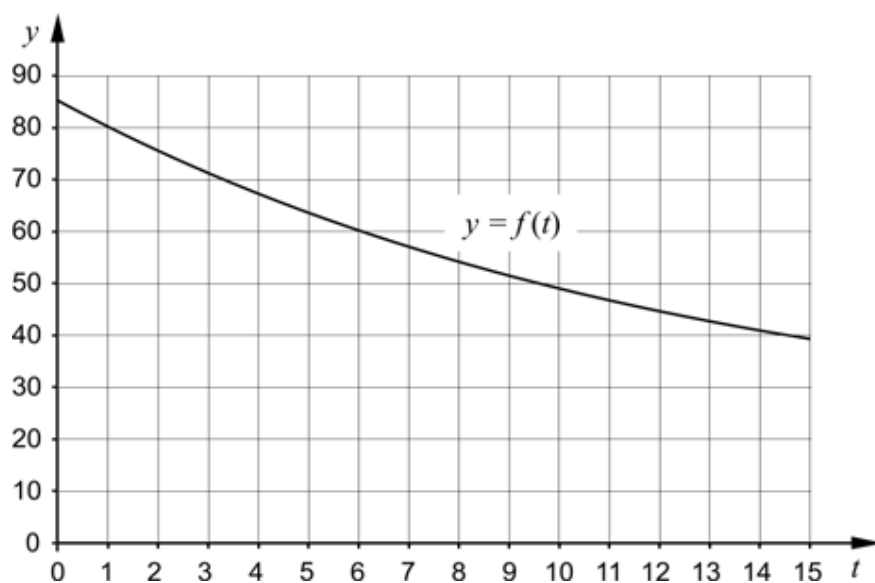
Svar b)  $y = 2x + 3$

## Del 1 # 10 (3/2) Termos

Ma2

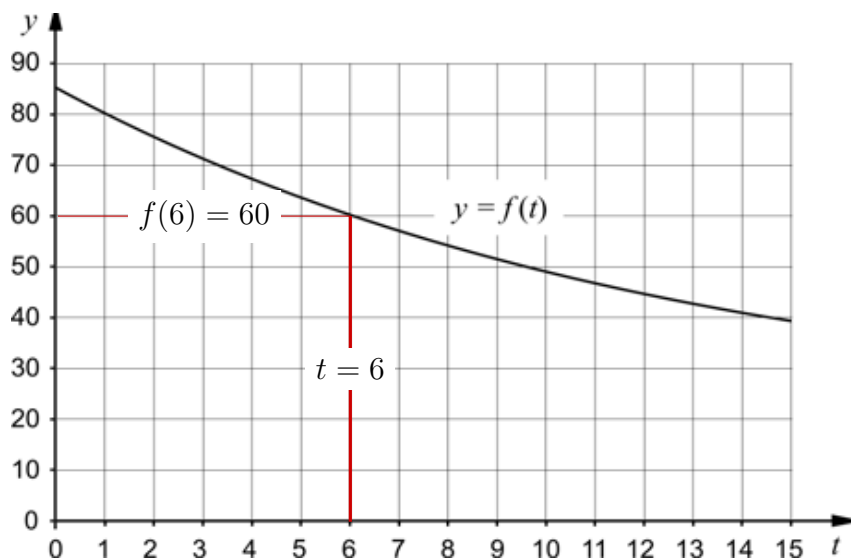
10. Ett företag som tillverkar en ny termosmodell undersöker termosens förmåga att behålla temperaturen för olika drycker. Vid en mätning avtar temperaturen för kaffe enligt sambandet  $y = f(t)$

Diagrammet visar kaffets temperatur  $y$  °C som funktion av tiden  $t$  timmar efter det att termosen fylldes med kaffe.



- a) Bestäm  $f(6)$  *Endast svar fordras* (1/0)
- b) Tolka vad  $f(6)$  betyder i detta sammanhang. (1/0)
- c) Formulera en fråga om kaffet som kan besvaras med hjälp av lösningen till ekvationen  $f(t) = 50$  (0/1)
- d) Beräkna  $\frac{f(6) - f(0)}{6}$  (1/0)
- e) Tolka vad  $\frac{f(6) - f(0)}{6}$  betyder i detta sammanhang. (0/1)

a) Bestäm  $f(6)$



Svar a)  $f(6) = 60$

b) Tolka vad  $f(6)$  betyder i detta sammanhang.

Svar b) Temperaturen efter 6 timmar.

c) Formulera en fråga

Svar c) Vid vilken tidpunkt  $t$  är kaffets temperatur  $50^\circ$ .

d) Beräkna ...

$$\frac{f(6) - f(0)}{6} = \frac{60^\circ - 85^\circ}{6} \approx -4,2^\circ$$

Svar d)  $-4,2^\circ$

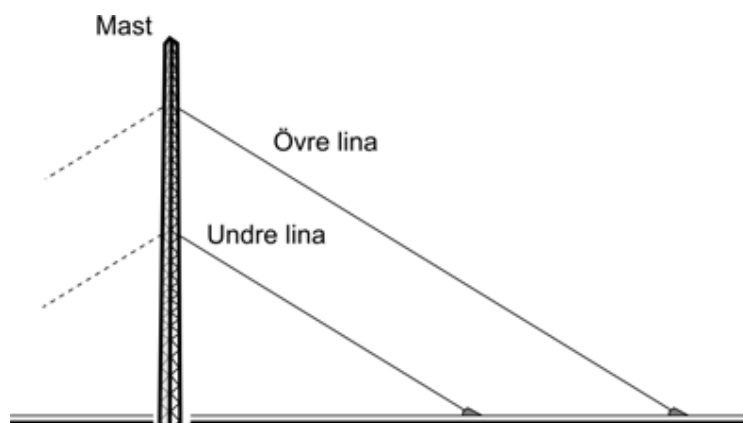
e) Tolka vad...

Svar e) Temperaturen sjunker i medeltal  $-4,2^\circ/\text{h}$  under de 6 första timmarna.

## Del 2 # 11 (4/0) Mast med linor

Ma2

11. En 30 meter hög mast är fastspänd med linor som går från masten snett ner till marken. Den övre linan är 40 meter lång och har sitt fäste 5 meter under mastens topp. Den undre linan har sitt fäste ytterligare 10 meter längre ner på masten. Den är spänd parallellt med den övre linan. Masten står vinkelrätt mot marken.



- a) Hur långt ut från masten är den övre linan fäst i marken? (2/0)
- b) Hur lång är den undre linan? (2/0)

## a) Hur långt ut ...

Använd Pythagoras sats.

$$40^2 = 25^2 + x^2$$
$$x = \sqrt{40^2 - 25^2} \approx 31$$

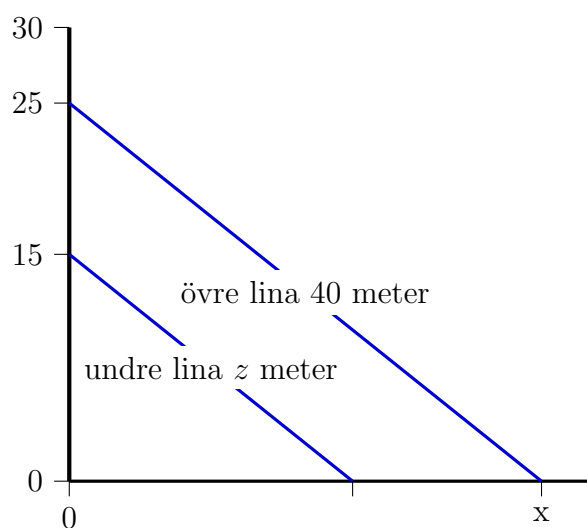
Svar a) 31 meter.

## b) Hur lång är den undre linan?

Använd likformighet.

$$\frac{z}{40} = \frac{15}{25} \quad \text{ger} \quad z = 24$$

Svar b) 24 meter.





**Del 2 # 12 (1/1) Skidhandskar**

Ma2bc

- 12.** En företagare tillverkar skidhandskar i färgerna mörkblå, grå och svart. För att få en bättre uppfattning om färgernas popularitet bland ungdomar så skickade han ut en enkät.

Enkäten skickades ut till 500 ungdomar som går på en närbelägen gymnasieskola. Av de 297 svaren som han fick in framgick att 19 % föredrar mörkblå, 41 % grå och 40 % svarta handskar.

Eftersom bortfallet var stort gjorde han en undersökning av bortfallsgruppen. Han ringde därför slumpvis upp 55 av de ungdomar som inte skickat in enkäten och då svarade 10 av dem mörkblå, 23 grå och de övriga svart.

Kommentera resultatet av bortfallsundersökningen.

(1/1)

|         | svarsgrupp<br>andel | bortfallsgrupp, 55 |                      |
|---------|---------------------|--------------------|----------------------|
|         |                     | antal              | andel                |
| mörkblå | 19%                 | 10                 | $10/55 \approx 18\%$ |
| grå     | 41%                 | 23                 | $23/55 \approx 42\%$ |
| svarta  | 40%                 | 22                 | $22/55 \approx 40\%$ |

**Svar** Skillnader mellan svarsgruppen och undersökningen i bortfallsgruppen är marginella.

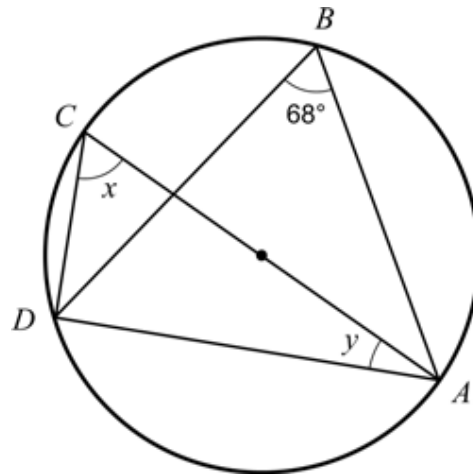
## Del 2 # 13

(1/1)

## Triangel i cirkel

Ma2bc

13. I cirkeln nedan är  $AC$  en diameter.



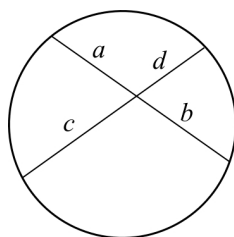
Mätning i figur ej tillåten

- |    |                           |                            |       |
|----|---------------------------|----------------------------|-------|
| a) | Hur stor är vinkeln $x$ ? | <i>Endast svar fordras</i> | (1/0) |
| b) | Hur stor är vinkeln $y$ ? | <i>Endast svar fordras</i> | (0/1) |

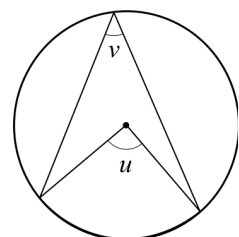
Uppgiften behandlar trianglar inskrivna i en cirkel. Använd randvinkelsatsen som finns i FORMELSAMLINGEN.

**Kordasatsen**

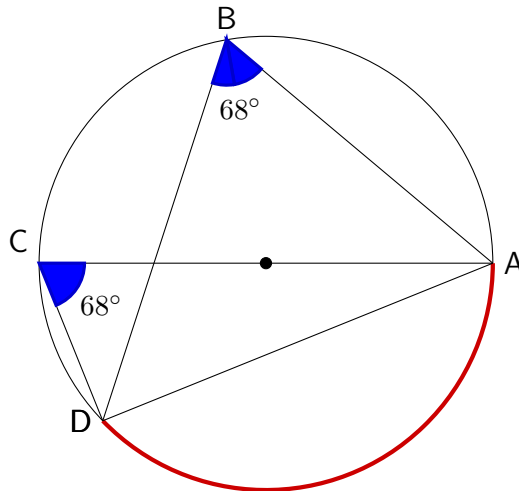
$$ab = cd$$

**Randvinkelsatsen**

$$u = 2v$$

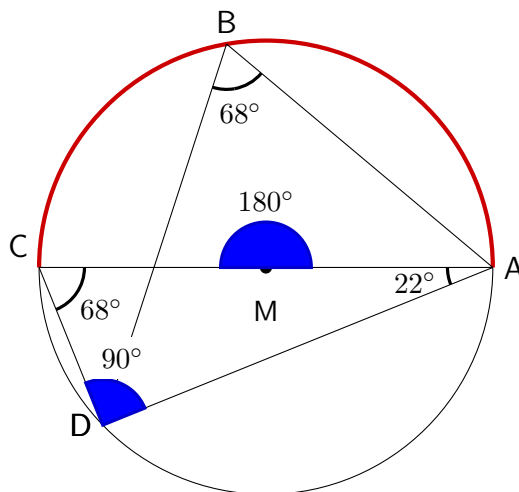


a) Enligt randvinkelsatsen är vinklarna vid B och C lika stora då båda vinklar är randvinklar till bågen mellan A och D.



Svar a)  $x = 68^\circ$

b) Enligt randvinkelsatsen är vinkeln vid D hälften av vinkeln vid mittpunkten M. Bågen är A till C. Vinkeln vid M är  $180^\circ$  vilket ger att vinkeln vid D är  $90^\circ$ . Med två kända vinklar i triangeln ACD kan vinkeln  $y$  beräknas enligt  $y = 180^\circ - 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ$ .



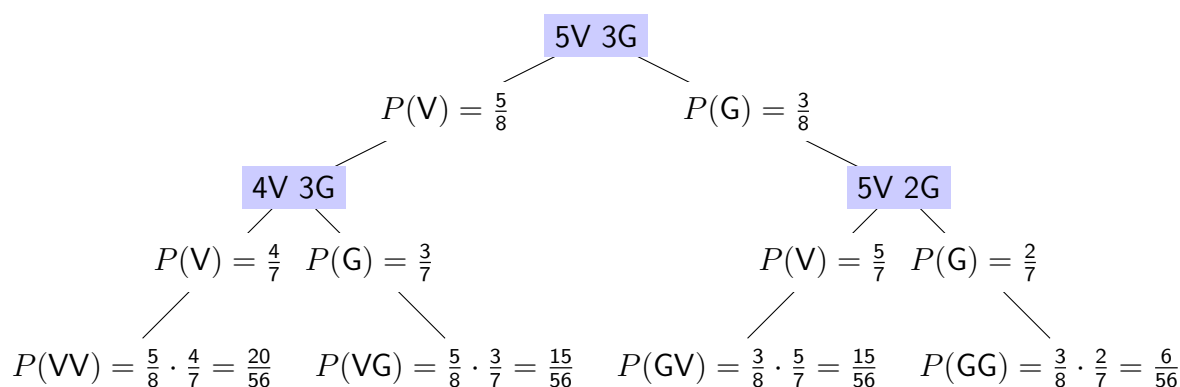
Svar b)  $y = 22^\circ$

## Del 2 # 14 (1/2) Golfbollar

Ma1

- 14.** Johanna har 5 vita och 3 gula golfbollar i sin golfbag. Hon tar upp två bollar ur bagen.
- a) Hur stor är sannolikheten att Johanna får två vita bollar? (1/1)
- b) Hur stor är sannolikheten att Johanna får en boll av vardera färgen? (0/1)

Uppgiften behandlar dragning utan återläggning. Låt  $V$  beteckna vit boll och  $G$  beteckna gul boll. I träd diagrammet visas de två första dragen vid dragning utan återläggning. Med  $P(VG)$  menas sannolikheten för att första draget ger vit boll och andra draget gul och med  $P(GV)$  menas att sannolikheten för att första draget ger gul och andra draget vit boll.



Resultatet av dragningen kan sammanfattas i följande tabell.

| 1:a bollen | 2:a bollen | sannolikhet                    |
|------------|------------|--------------------------------|
| V          | V          | $\frac{20}{56} = \frac{5}{14}$ |
| V          | G          | $\frac{15}{56}$                |
| G          | V          | $\frac{15}{56}$                |
| G          | G          | $\frac{6}{56} = \frac{3}{28}$  |

**Svar a)** Sannolikheten att få två vita bollar är  $\frac{20}{56} = \frac{5}{14}$ .

**Svar b)** Sannolikheten att få en vit och en gul boll är  $\frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{15}{28}$ .

## Del 2 # 15 (1/1/⊗) Medelvärde och median

Ma2bc

15. a) Ge ett exempel på fyra olika tal så att medelvärdet för talen är lägre än medianen för talen. *Endast svar fordras* (1/0)
- b) Hur måste fyra olika tal väljas för att medelvärdet för talen ska vara lägre än medianen för talen? Motivera. (0/1/⊗)

a)

$$\begin{array}{c}
 \text{median } 6 \\
 \underbrace{0 \quad 5 \quad 7 \quad 8}_{\text{medelvärde} = (0+5+7+8)/4=5}
 \end{array}$$

**Svar a)** Exempelvis 0, 5, 7 och 8 har större median än medelvärde.

b) Låt de fyra talen vara  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ . Medelvärdet ska vara lägre än medianen.

$$\underbrace{\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}}_{\text{medelvärde}} < \underbrace{\frac{x_2 + x_3}{2}}_{\text{median}}$$

Olikheten kan skrivas om enligt följande

$$\begin{aligned}
 \frac{x_2 + x_3}{4} + \frac{x_1 + x_4}{4} &< \frac{x_2 + x_3}{2} \\
 \frac{x_1 + x_4}{4} &< \frac{x_2 + x_3}{4} \\
 x_1 + x_4 &< x_2 + x_3.
 \end{aligned}$$

**Svar b)** Medelvärdet av  $x_1, x_2, x_3$  och  $x_4$  då  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  är lägre än medianen när  $x_1 + x_4 < x_2 + x_3$ .

**Kommentar** I Skolverkets rättningsnorm står följande.

15.

Max 1/1/⊗

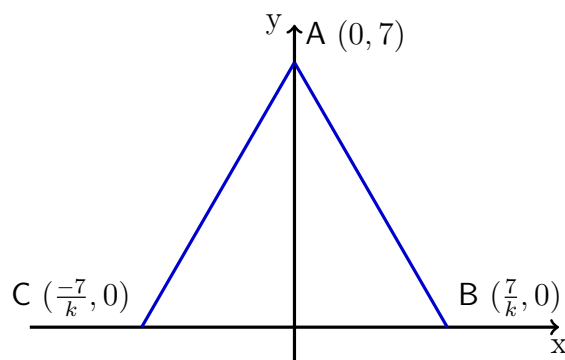
- a) Korrekt svar (t.ex. talen 2, 7, 8 och 9) +1 g
- b) Godtagbar förklaring (t.ex. ”sänk det minsta talet till dess att medelvärdet blir lägre än medianen”) +1 vg

**Del 2 # 16**      **(0/3/⊗)**      **Liksidig triangel**

Ma2

- 16.** De två räta linjerna  $y = kx + 7$  och  $y = -kx + 7$ , där  $k$  är en positiv konstant, bildar tillsammans med  $x$ -axeln en triangel. Bestäm  $k$  så att denna triangel blir liksidig.

(0/3/∞)



Triangelns sidor är alla lika långa och  $d$ . Med avståndsformeln (Pythagoras sats) kan avståndet mellan A och B beräknas enligt

$$d^2 = 7^2 + \left(\frac{7}{k}\right)^2 = 49 + \left(\frac{49}{k^2}\right)$$

Avståndet mellan B och C är

$$d = \frac{7}{k} - \left(-\frac{7}{k}\right) = \frac{14}{k}$$

$$d^2 = \frac{196}{k^2}.$$

Vi får nu

$$\frac{196}{k^2} = 49 + \frac{49}{k^2}$$

$$\frac{147}{k^2} = 49$$

$$k^2 = \frac{49}{147} = \frac{1}{3}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Svar**  $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**Kommentar** Notera att  $k = \frac{-1}{\sqrt{3}}$  ger samma triangel.

## Del 2 # 17 (2/4/⊗) Dela lika

Ma2

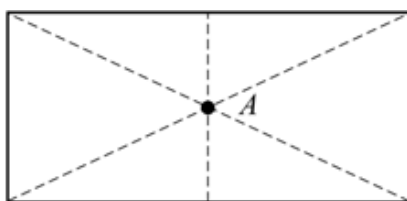
17. Ibland har man nytta av att kunna dela ett glasspaket i tre lika stora delar. Det finns en metod att göra detta med enbart en kniv. Din uppgift är att undersöka metoden och visa att den fungerar. Glasspaketet har formen av ett rätblock.



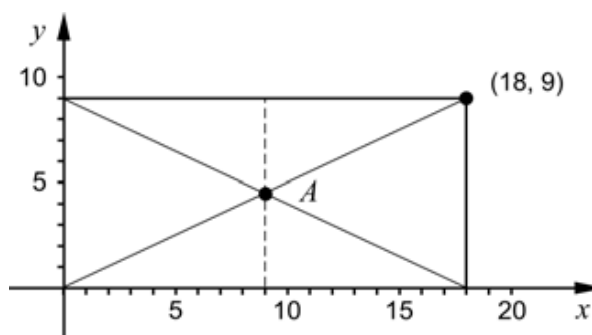
Vi börjar med att dela in glasspaketet i två lika stora delar.

**Dela lika på två**

Markera diagonalerna och markera en linje genom diagonalernas skärningspunkt A parallellt med kortsidorna. Denna linje delar glasspaketet i två lika stora delar.



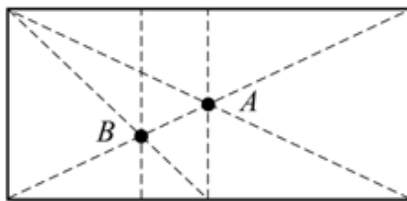
Ett glasspaket som har måtten  $18\text{ cm} \times 9\text{ cm} \times 3,1\text{ cm}$  rymmer en halv liter glass. Tänk dig nu ovansidan av detta glasspaket, med måtten  $18\text{ cm} \times 9\text{ cm}$ , inlagt i ett koordinatsystem.



- Bestäm ekvationer för de räta linjer som utgör diagonaler.
- Bestäm skärningspunkten A genom att lösa ett ekvationssystem och visa att den streckade linjen genom punkten A delar paketet i två lika stora delar.

**Dela lika på tre**

Markera en linje genom ett hörn och mitten av den motsatta långsidan. Denna linje skär diagonalen i en punkt  $B$ . Dela paketet längs en linje som går genom  $B$  parallellt med kortsidorna. Då får du en tredjedel. Den andra tredjedelen skär du av på andra sidan med samma metod och samtidigt får du då också den sista tredjedelen.



- Ställ upp ett ekvationssystem och bestäm skärningspunkten  $B$  för glasspaketet som har måtten  $18\text{ cm} \times 9\text{ cm}$  på ovansidan. Visa att metoden "Dela lika på tre" fungerar i detta fall. (Du behöver bara visa hur den första tredjedelen fås.)
- Visa att metoden "Dela lika på tre" fungerar för alla glasspaket i form av rätblock, oavsett vilka mått ovansidan har. (Du behöver bara visa hur den första tredjedelen fås.)

(2/4/□)

**Vid bedömningen av ditt arbete med följande uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:**

- Hur generell din lösning är
- Vilka matematiska kunskaper du visar
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du genomför dina beräkningar
- Hur väl du redovisar och kommenterar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

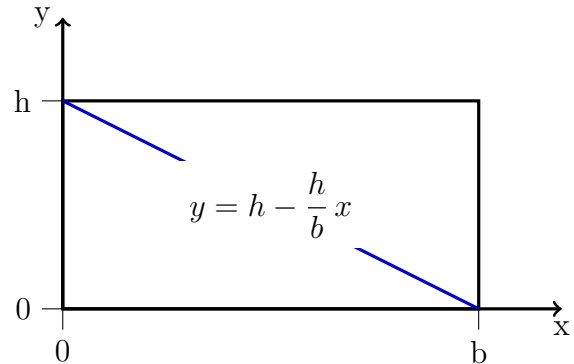
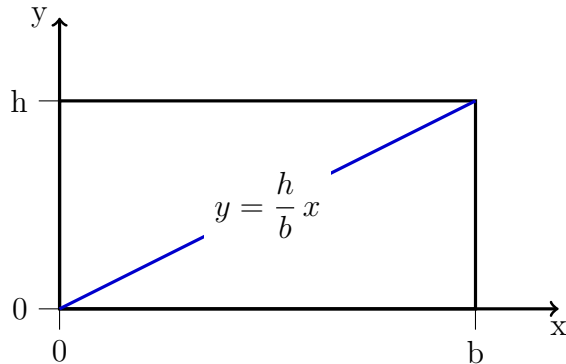
Uppgiften rymmer konkreta formuleringar som *måtten  $18\text{ cm} \times 9\text{ cm}$* . Alternativet är en mer generell formulering som  $b \times h$ . Ibland är det lätt och lämpligt att arbeta konkret men det kan också dölja struktur på ett sätt som generell formulering inte gör.

Exempelvis blir kvoten  $\frac{\text{höjd}}{\text{bredd}}$  i ett konkret fall bara ett tal som inte avslöjar någon struktur.



Bestäm ekvationer för de räta linjer som utgör diagonaler.

Behandla det generella problemet, inför  $b$  som beteckning för bredd och  $h$  för höjd.



Linjen från nedre vänstra hörnet  $(0,0)$  till övre högra hörnet  $(b,h)$  är

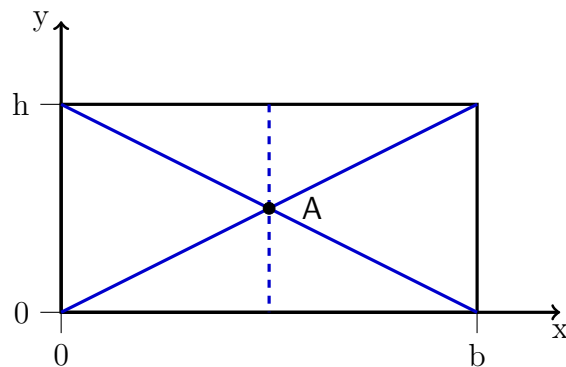
$$y = \frac{h}{b}x$$

och ekvationen från övre vänstra hörnet  $(0,h)$  till nedre högra  $(b,0)$  är

$$y = h - \frac{h}{b}x.$$

**Svar** Med  $b = 18$  och  $h = 9$  blir ekvationerna  $y = \frac{1}{2}x$  respektive  $y = 9 - \frac{1}{2}x$ .

Bestäm skärningspunkten A genom att lösa ett ekvationssystem ...



De två ekvationerna är

$$y = \frac{h}{b}x$$

$$y = h - \frac{h}{b}x$$

Lös ekvationssystemet. Eliminera  $y$ .

$$\frac{h}{b}x = h - \frac{h}{b}x$$

$$\frac{2h}{b}x = h$$

$$x = \frac{b}{2}$$

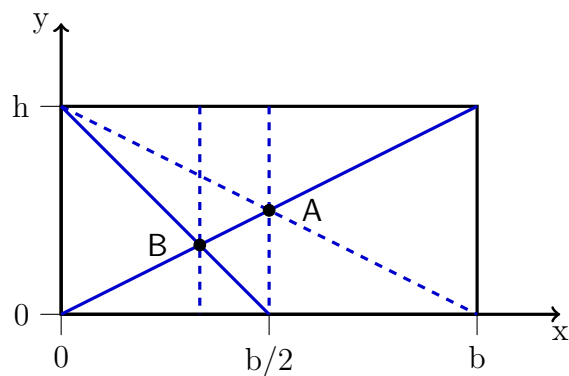
Med  $x$  känd kan  $y$  beräknas ur första ekvationen.

$$y = \frac{h}{b} \frac{b}{2} = \frac{h}{2}$$

Koordinaterna för A är  $\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$ .

**Svar** Med  $b = 18$  och  $h = 9$  blir koordinaterna för A  $(9; 4,5)$ .

Ställ upp ett ekvationssystem och bestäm skärningspunkten B ...



Linjen från nedre vänstra hörnet  $(0,0)$  till övre högra hörnet  $(b,h)$  är

$$y = \frac{h}{b} x$$

och ekvationen från  $(0,h)$  till  $(\frac{b}{2},0)$  är

$$y = h - \frac{2h}{b} x$$

Lös ekvationssystemet. Eliminera  $y$ .

$$\frac{h}{b} x = h - \frac{2h}{b} x$$

$$\frac{3h}{b} x = h$$

$$x = \frac{b}{3}$$

Med  $x$  känd kan  $y$  beräknas ur första ekvationen.

$$y = \frac{h}{b} \frac{b}{3} = \frac{h}{3}$$

Koordinaterna för B är  $\left(\frac{b}{3}, \frac{h}{3}\right)$ .

**Visa att metoden ”Dela lika på tre” fungerar för alla glasspaket ...**

I ovanstående lösning har inga speciella egenskaper hos paketets bredd  $b$  och höjd  $h$  använts. Lösningen gäller alltså alla paket.