

Innehåll

Förord	2
NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS B HÖSTEN 2006	3
NpMaB HT 2006 LÖSNINGAR	3
Del I: Digitala verktyg är INTE tillåtna	3
Del 1 # 1 (2/0) Lös ekvationen	3
Del 1 # 2 (1/0) Rita linje	4
Del 1 # 3 (2/1) Linjärt ekvationssystem	5
Del 1 # 4 (1/0) Vilken av funktionerna	6
Del 1 # 5 (2/0) Chokladhjul	7
Del 1 # 6 (2/1) Logotyp i cirkel	8
Del 1 # 7 (1/2) Beräkna och förenkla	10
Del 1 # 8 (0/1/⊗) Triangel	11
Del II: Digitala verktyg är tillåtna	12
Del 1 # 9 (1/0) Utveckla och förenkla	12
Del 1 # 10 (2/0) Linje genom punkt	13
Del 2 # 11 (4/0) Triangel med parallell linje	14
Del 2 # 12 (2/1) Lådagram	16
Del 2 # 13 (0/2) Punkt ovanför linje	18
Del 2 # 14 (0/2) Linjaler	19
Del 2 # 15 (1/1) Ringmärkta havsörnar	20
Del 2 # 16 (0/2/⊗) Låda med volymen 2000 cm ³	22
Del 2 # 17 (0/3/⊗) Ekvationssystem	25
Del 2 # 18 (3/4/⊗) Stoppsträcka	27

Förord

Skolverket har endast publicerat *ett* kursprov till kursen Ma 2. Innehållet i den äldre kursen Ma B hör nu till Ma 1 och/eller Ma 2. I tabellen nedan framgår vilka uppgifter som är lämpliga till respektive kurs.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ma 1abc		2			5										15			
Ma 2a	1	2	3	4			6	8	9	10						16	17	
Ma 2bc	1	2	3	4		6	6	8	9	10	11	12	13	14		16	17	18

Kom ihåg

- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan

- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

NpMaB HT 2006 LÖSNINGAR

Del I: Digitala verktyg är INTE tillåtna

Del 1 # 1 (2/0) Lös ekvationen

1. Lös ekvationen $x^2 - 20x + 36 = 0$	(2/0)
--	-------

Ekvationen är en 2:a gradsekvation. Lös ekvationen med pq-formeln som finns i FORMELSAMLINGEN.

Regler

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Andragradsekvationer

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - \underbrace{20}_{p=-20} + \underbrace{36}_{q=36} \\ x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{10^2 - 36} = 10 \pm \sqrt{64} = 10 \pm 8 \\ x_1 &= 18 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Svar a) $x_1 = 18$ och $x_2 = 2$

Kommentar Alla 2:a gradsekvationer kan lösas med pq-formeln men om en av p eller q saknas kan ekvationen lösas enklare utan pq-formel.

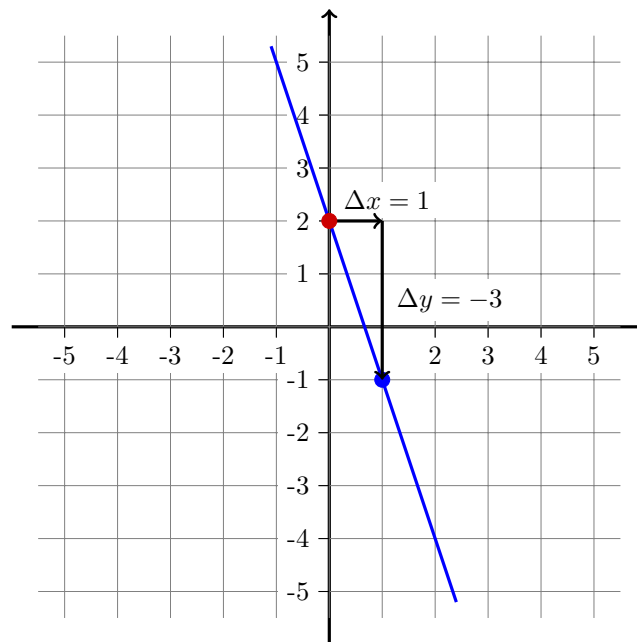
Del 1 # 2 (1/0) Rita linje

2. Rita i ett koordinatsystem en rät linje som går genom punkten $(0, 2)$ och har riktningskoefficienten -3

Endast svar fordras

(1/0)

Rita linjen ...



Strategi

- 1) Markera första punkten på linjen, $(0, 2)$
- 2) Hitta en andra punkt. Tag 1 steg i x -led och -3 steg i y -led
- 3) Drag en linje genom de två punkterna

Del 1 # 3 (2/1) Linjärt ekvationssystem

3. a) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + y = 15 \\ 3x + 2y = 42 \end{cases}$ (2/0)

I en kiosk betalade Pelle 15 kr för en korv med bröd. Detta beskrivs i den första ekvationen i ekvationssystemet ovan.

b) Låt x vara priset i kronor för en korv. Tolka den andra ekvationen i ord. (0/1)

a) Lös ekvationssystemet

Det finns två olika metoder för att lösa linjära ekvationssystem med flera obekanta. För ekvationssystem med bara två obekanta är det betydelselöst vilken metod du väljer. Substitutionsmetoden är enkel och fungerar utmärkt för två obekanta.

$$x + y = 15 \quad (1)$$

$$3x + 2y = 42 \quad (2)$$

Skriv om ekvation (1) till

$$y = 15 - x \quad (3)$$

Substitutera y i ekvation (2) med hjälp av ekvation (3). Vi får

$$3x + 2(15 - x) = 42$$

$$3x + 30 - 2x = 42$$

$$x = 12 \quad (4)$$

Med ekvation (3) och (4) kan y beräknas.

$$y = 15 - 12$$

$$y = 3$$

Svar a) $x = 12$ och $y = 3$

Svar b) Ekvationen beskriver att priset för 3 korvar och 2 bröd är 42 kronor.

Del 1 # 4

(1/0)

Vilken av funktionerna ...

4. Vilken av funktionerna A-F visas som graf i figuren?

A) $y = x^2$

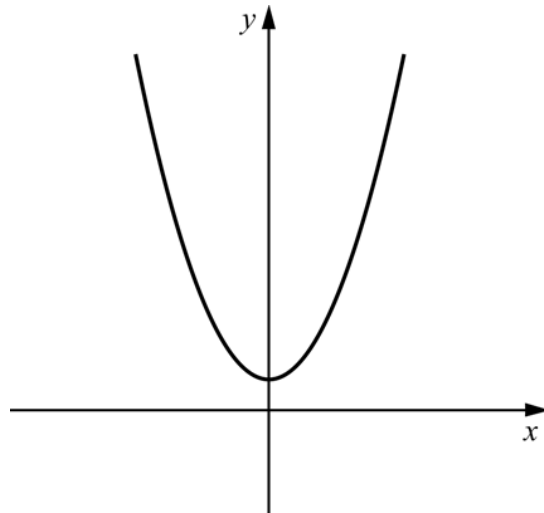
B) $y = -x^2$

C) $y = x^2 + 1$

D) $y = x^2 - 1$

E) $y = 1 - x^2$

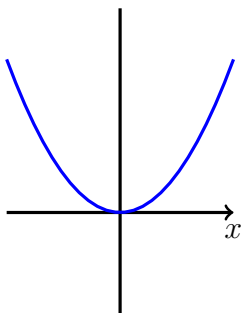
F) $y = -1 - x^2$



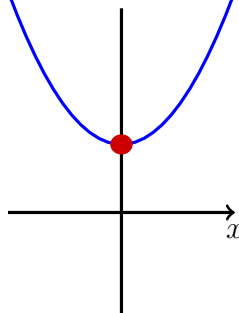
Endast svar fordras

(1/0)

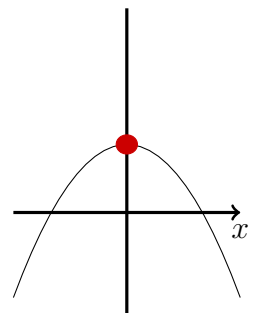
A $y = +x^2$



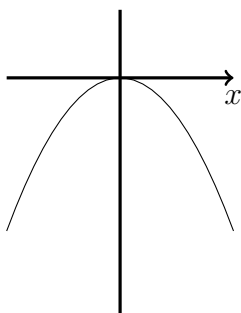
C $y = +x^2 + 1$



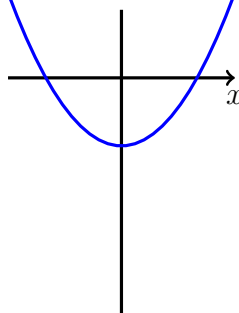
E $y = +1 - x^2$



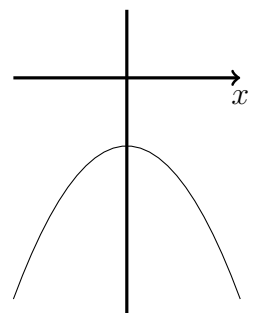
B $y = -x^2$



D $y = +x^2 - 1$



F $y = -1 - x^2$



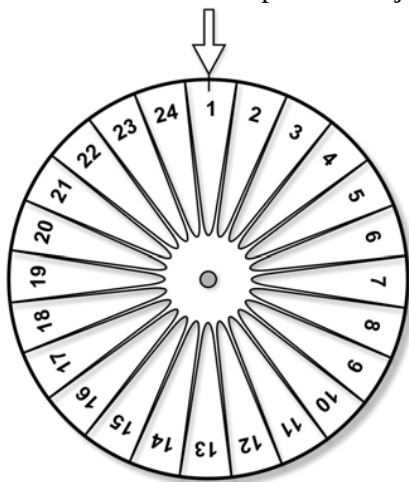
Svar Alternativ C är korrekt, $y = x^2 + 1$.

Del 1 # 5

(2/0)

Chokladhjul

5. Robin och Jennifer är på ett nöjesfält och spelar på Chokladhjulet. Hjulet är indelat i 24 likadana delar som är numrerade från 1 till 24. Vid en spelomgång snurras hjulet och det nummer som är vid pilen när hjulet stannat ger vinst.



- a) Robin påstår att det är lättare att vinna om de alltid spelar på samma nummer.
Har Robin rätt eller fel? Förklara. (1/0)
- b) De planerar sedan att spela på tre nummer i samma spelomgång. Jennifer påstår att det är lättare att vinna om de spelar på tre nummer intill varandra, t.ex. 3, 4 och 5, än om de spelar på tre nummer som inte är intill varandra.
Har Jennifer rätt eller fel? Förklara. (1/0)

Svar a) De olika utfallen är oberoende av varandra. I Skolverkets rättningsnorm finns följande svar.

- a) Godtagbar förklaring med korrekt svar ("Robin har fel. Sannolikheten för vinst är alltid $\frac{1}{24}$ oavsett vilket nummer man satsar på.")

Svar b) De olika utfallen är oberoende av varandra. I Skolverkets rättningsnorm finns följande svar.

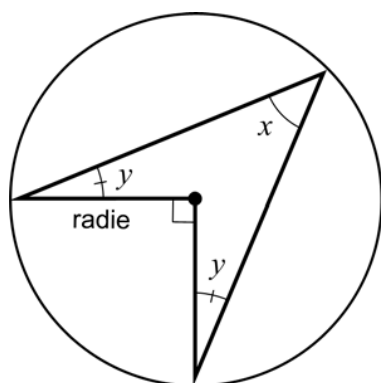
- b) Godtagbar förklaring med korrekt svar ("Jennifer har fel, oavsett vilka tre nummer du väljer blir sannolikheten för vinst $\frac{3}{24} = 0,125 = 12,5\%$ ")

Del 1 # 6 (2/1) Logotyp i cirkel

6. På en reklambyrå ska en cirkulär logotyp tillverkas för en kunds räkning enligt skissen nedan. För att kunna tillverka logotypen måste vinklarna bestämmas.

Beräkna x och y .

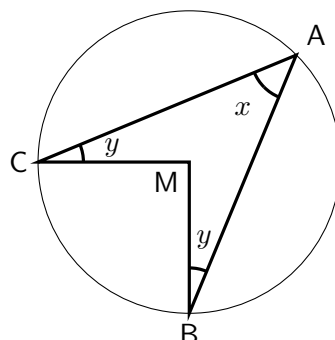
(2/1)



Skiss



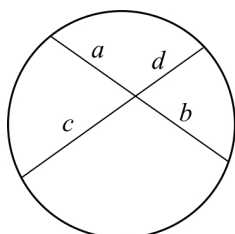
Färdig logotyp



Randvinkelsatsen finns i FORMELSAMLINGEN.

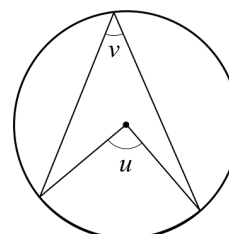
Kordasatsen

$$ab = cd$$

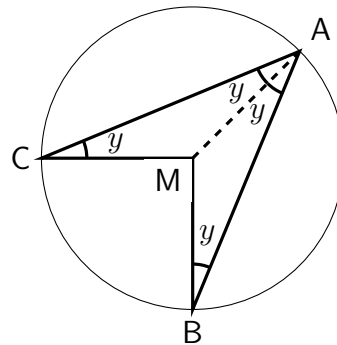


Randvinkelsatsen

$$u = 2v$$



$\angle BMC$ är centrumvinkel till randvinkeln $\angle BAC$ och $\angle BMC = 90^\circ$ vilket ger $\angle BAC = x = 45^\circ$ enligt randvinkelsatsen.



Enligt uppgiftens figur gäller att $\angle MBA$ och $\angle MCA$ är lika. $\triangle MAB$ är likbent med två lika vinklar y . $\triangle MAC$ är också likbent med två lika vinklar y . För $\angle BAC$ också kallad x gäller att $x = y + y$ vilket ger $y = 22,5^\circ$.

Svar $x = 45^\circ$ och $y = 22,5^\circ$

Del 1 # 7 (1/2) Beräkna och förenkla

7. Låt $f(x) = (1-x)^2 - (1+x)^2$

a) Beräkna $f(2)$ (1/0)

b) Förenkla uttrycket $f(a) - f(b)$ så långt som möjligt. (0/2)

a) Beräkna $f(2)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \overbrace{(1-x)^2}^{x=2} - \overbrace{(1+x)^2}^{x=2} \\ f(2) &= \underbrace{(1-2)^2}_{(-1)^2=1} - \underbrace{(1+2)^2}_{3^2=9} = -8 \end{aligned}$$

Svar a) -8

b) Förenkla $f(a) - f(b)$

$$\begin{aligned} f(a) &= (1-a)^2 - (1+a)^2 \\ f(b) &= (1-b)^2 - (1+b)^2 \end{aligned}$$

Använd kvadreringsreglerna i FORMELSAMLINGEN.

Regler

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Andragradsekvationer

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Vi får

$$\begin{aligned} f(a) &= \overbrace{1 - 2a + a^2}^{(1-a)^2} - \overbrace{(1 + 2a + a^2)}^{(1+a)^2} \\ f(a) &= 1 - 2a + a^2 - 1 - 2a - a^2 = -4a \\ f(b) &= \overbrace{1 - 2b + b^2}^{(1-b)^2} - \overbrace{(1 + 2b + b^2)}^{(1+b)^2} = 2 + 2b^2 \\ f(b) &= 1 - 2b + b^2 - 1 - 2b - b^2 = -4b \\ f(a) - f(b) &= -4a - (-4b) = -4a + 4b = 4(b - a) \end{aligned}$$

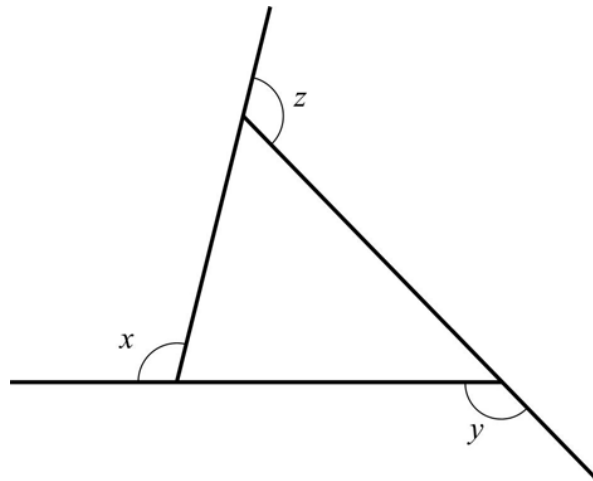
Svar b) $4(b - a)$

Del 1 # 8 (0/1/⊗) Triangel

8. x, y och z är yttervinklar till triangeln nedan.

Visa att $x + y + z = 360^\circ$

(0/1/⊗)



Inför vinklar x' , y' och z' enligt figuren. Triangelns vinkelsumma är 180° .

$$180^\circ = x' + y' + z'$$

Det gäller att

$$x' = 180^\circ - x$$

$$y' = 180^\circ - y$$

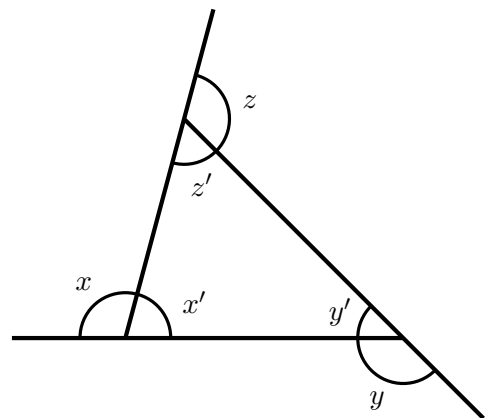
$$z' = 180^\circ - z$$

Vi får

$$180^\circ = (180^\circ - x) + (180^\circ - y) + (180^\circ - z)$$

$$180^\circ = 3 \cdot 180^\circ - x - y - z$$

$$x + y + z = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$$



Vilket skulle visas.

Del II: Digitala verktyg är tillåtna

Del 1 # 9 (1/0) Utveckla och förenkla

9. Utveckla $(2x - 3)(x + 7)$ och förenkla uttrycket så långt som möjligt.

Endast svar fordras

(1/0)

Variant I

$$\begin{aligned}(2x - 3)(x + 7) &= 2x \cdot (x + 7) - 3 \cdot (x + 7) \\&= (2x \cdot x + 2x \cdot 7) - (3 \cdot x + 3 \cdot 7) \\&= (2x^2 + 14x) - (3x + 21) \\&= 2x^2 + 14x - 3x - 21 \\&= 2x^2 + 11x - 21\end{aligned}$$

Variant II

$$\begin{aligned}(2x - 3)(x + 7) &= (2x - 3) \cdot x + (2x - 3) \cdot 7 \\&= (2x \cdot x - 3 \cdot x) + (2x \cdot 7 - 3 \cdot 7) \\&= (2x^2 - 3x) + (14x - 21) \\&= 2x^2 - 3x + 14x - 21 \\&= 2x^2 + 11x - 21\end{aligned}$$

Svar $x^2 + 11x - 21$

Del 1 # 10 (2/0) Linje genom punkt

- 10.** Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten (15, 28) och har riktningskoefficienten $k = 0,2$

(2/0)

I FORMELSAMLINGEN på sidan 2 finns räta linjens ekvation.

Räta linjen

$$y = kx + m \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Andragradsfunktioner

$$y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

Med $k = 0,2$ blir ekvationen

$$y = 0,2 \cdot x + m$$

Linjen går genom punkten (15, 28)

$$\underbrace{y}_{y=28} = 0,2 \cdot \underbrace{x}_{x=15} + \underbrace{m}_{m=25}$$

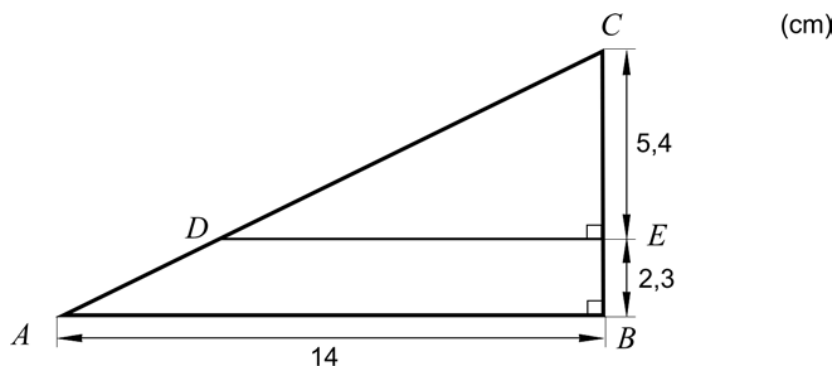
Svar $y = 0,2 \cdot x + 25$

Del 2 # 11

(4/0)

Triangel med parallell linje

11. I triangeln ABC är DE parallell med AB .



Figuren är inte skalenligt ritad

- a) Bestäm längden av sträckan AC . (2/0)
- b) Bestäm längden av sträckan DE . (2/0)

a) Kalla sträckan AC för z . Pythagoras sats ger

$$\begin{aligned}z^2 &= 14^2 + (5,4 + 2,3)^2 \\z^2 &= 196 + 59,29 = 255,29 \\z &= 15,978 \dots\end{aligned}$$

Svar a) Sträckan AC är 16 cm.

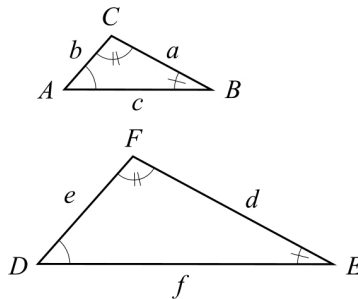
Kommentar Alla i uppgiften givna längder är givna med 2 siffror. Då är det också lämpligt att ge svaret med 2 siffror, 15,798 är alltså olämpligt.

b) Triangelarna ABC och DEC är likformiga då de har två lika vinklar, en rät vinkel och vinkel C . När två trianglar är likformiga gäller enligt FORMELSAMLINGEN följande.

Likformighet

Triangelarna ABC och DEF är likformiga.

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$



Skala

$$\begin{aligned} \text{Areaskalan} &= (\text{Längdskalan})^2 \\ \text{Volymskalan} &= (\text{Längdskalan})^3 \end{aligned}$$

Kalla sträckan DE för u . Likformigheten ger

$$\begin{aligned} \frac{u}{14} &= \frac{5,5}{5,4 + 2,3} \\ u &= \frac{14 \cdot 5,5}{7,7} = 10 \end{aligned}$$

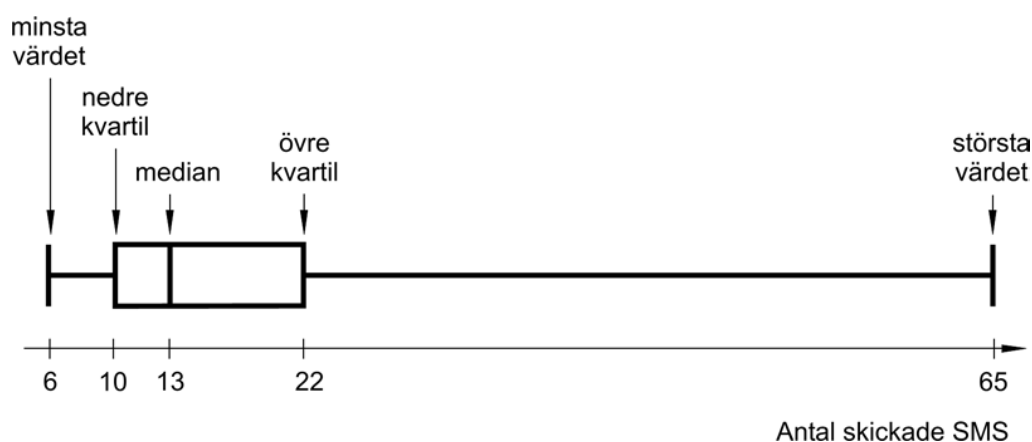
Svar b) Sträckan DE är 10 cm.

Del 2 # 12 (2/1) Lådagram

12. Sara ville ta reda på hur vanligt det är att man skickar SMS i hennes klass.

I klassen går det 29 elever. En dag lämnade Sara ut lappar med frågan "Hur många SMS skickade du förra veckan?" Alla i klassen utom Sara svarade på frågan.

Det lådagram som hon ritade över resultatet ser du här nedanför. Med lådagrammet delas antalet elevsvar in i fyra lika stora delar. Till exempel så finns en fjärdedel av elevsvaren mellan det *minsta värdet* och *nedre kvartilen*, se figur.



- a) Bestäm variationsbredden. *Endast svar fordras* (1/0)
- b) Medelvärde är 23 skickade SMS.
Förklara vilket lägesmått (medelvärde eller median) som är lämpligast att använda om du vill beskriva hur många SMS en elev i klassen skickar under en vecka. (1/0)
- c) Sara hade själv skickat 52 SMS.
Undersök om medianen ändras om Saras SMS räknas med. (0/1)

a)

$$\underbrace{\text{variationsbredden}}_{65-6=59} = \underbrace{\text{största värdet}}_{65} - \underbrace{\text{minsta värdet}}_6$$

Svar a) 59

Svar b) Median är lämpligast eftersom enstaka kraftigt avvikande värden inte påverkar medianen. I Skolverkets rättningsnorm står följande.

b) Godtagbart svar ("Eftersom fördelningen är sned så är medianen lämpligast att använda")

c) Med jämt antal personer, 28, blir medianen medelvärdet av de två mittersta talen.

$$x_1, \dots, x_{13}, \underbrace{x_{14}, x_{15}}, x_{16}, \dots, x_{28}$$
$$\text{median} = (x_{15} + x_{14})/2$$

Med udda antal personer, 29, blir medianen mittersta talet som i detta fall är större än den tidigare medianen.

$$x_1, \dots, x_{13}, x_{14}, \underbrace{x_{15}}, x_{16}, \dots, x_{28}, x_{29}$$
$$\text{median} = x_{15}$$

Svar c) Medianen i de tvåfallen är lika endast då de två mittersta talen är lika. I Skolverkets rättningsnorm står följande.

c) Godtagbar undersökning kring vad som kan ske med medianen om Saras SMS räknas med ("Medianen kan ändras eller vara densamma")

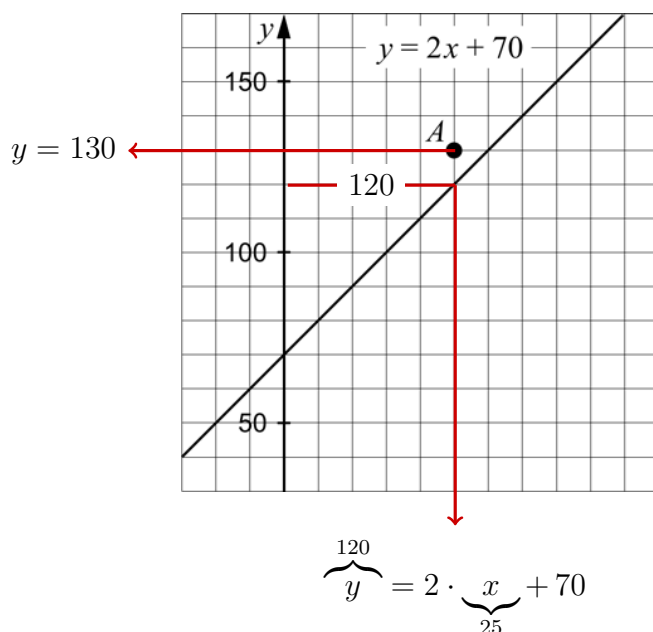
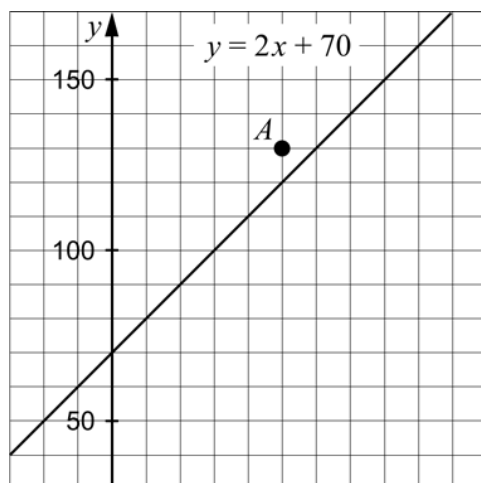
Del 2 # 13

(0/2)

Punkt ovanför linje

13. Figuren visar en del av ett koordinatsystem med linjen $y = 2x + 70$. Vilka koordinater har punkten A?

(0/2)



Punkten A har y -koordinaten 130. Vi söker x -koordinaten för punkten A men x -axeln är inte graderad. Punkten på linjen med y -koordinaten 120 har samma x -koordinat som punkten A. Stoppa in $y = 120$ i linjens ekvation $y = 2x + 70$ och ut trillar $x = 25$.

Svar Koordinaterna för punkten A är (25, 130).

Del 2 # 14 (0/2) Linjaler

14. Firma Plastsaker & Sånt tillverkar bland annat linjaler. Varje vecka tillverkas 50 000 linjaler. Alla linjaler som tillverkades under en viss vecka såldes till en kund i Lund.

Efter ett tag började firman få klagomål från kunden och beslöt att göra en kvalitetskontroll i form av en stickprovsundersökning. Under en vecka kontrollerades kvaliteten på var 200:e linjal som tillverkades. Man hittade 11 linjaler som var av dålig kvalitet.

Hur många av de linjaler som skickades till Lund kan antas ha varit av dålig kvalitet?

(0/2)

Veckans produktion		50 000	linjaler
Stickprovets andel	$\frac{1}{200}$		—
Stickprovets storlek	$\frac{1}{200} \times 50\,000$	250	linjaler
Antal dåliga i stickprovet		11	linjaler
Andel dåliga i stickprovet	$\frac{11}{250}$		—
Antal dåliga i veckans produktion	$\frac{11}{250} \times 50\,000$	2 200	linjaler

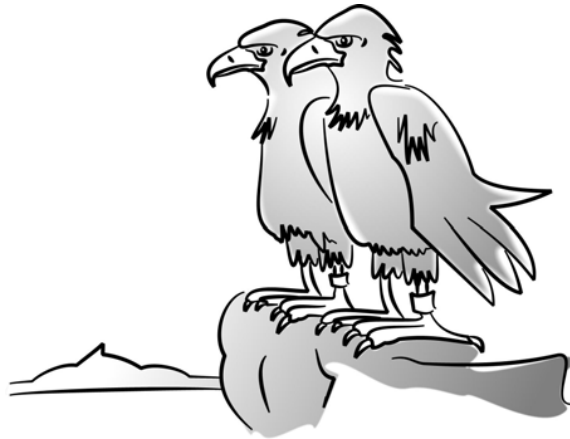
Svar Antalet dåliga i veckans produktion är 2 200 under antagandet att stickprovet är representativt.

Del 2 # 15

(1/1)

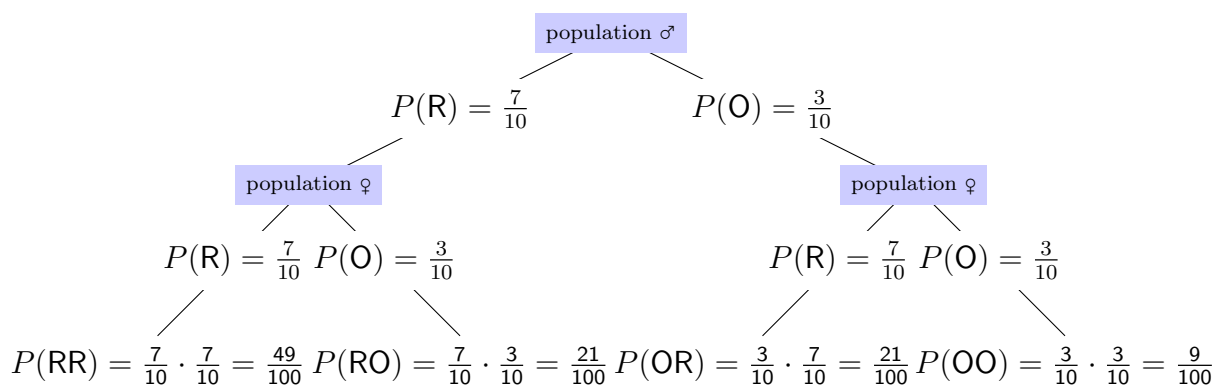
Ringmärkta havsörnar

15. Sveriges största rovfågel är havsörnen. Uppskattningsvis 70 % av de svenska havsörnarna är ringmärkta. Havsörnar som lever i par håller under hela sin livslängd ihop med samma partner.



- a) Beräkna sannolikheten att ett havsörnspar består av två ringmärkta fåglar. (1/0)
- b) Beräkna sannolikheten att ett havsörnspar består av en ringmärkt och en omärkt fågel. (0/1)

Uppgiften behandlar dragning ur två populationer, hanar σ och honor φ . Sannolikheten för att en fågel är ringmärkt är 0,7. Låt R beteckna ringmärkt fågel och O beteckna icke märkt fågel. I trädidiagrammet visas dragning av hane σ och därefter hona φ . Med $P(RO)$ menas sannolikheten för att hanen är ringmärkt och honan icke ringmärkt med $P(OR)$ menas att sannolikheten för att hanen är icke ringmärkt och honan ringmärkt



Resultatet av dragningen kan sammanfattas i följande tabell.

σ^7	φ	sannolikhet
R	R	0,49
R	O	0,21
O	R	0,21
O	O	0,09

Svar a) Sannolikheten att få ett par där båda är ringmärkta är 0,49.

b) Sannolikheten att få ett par där hanen σ^7 är märkt och honan φ icke märkt är 0,21 och sannolikheten att få ett par där hanen σ^7 är icke märkt och honan φ märkt är 0,21. Sannolikheten att ett havsörnspar består av en ringmärkt och en icke ringmärkt fågel är $0,21 + 0,21 = 0,42$.

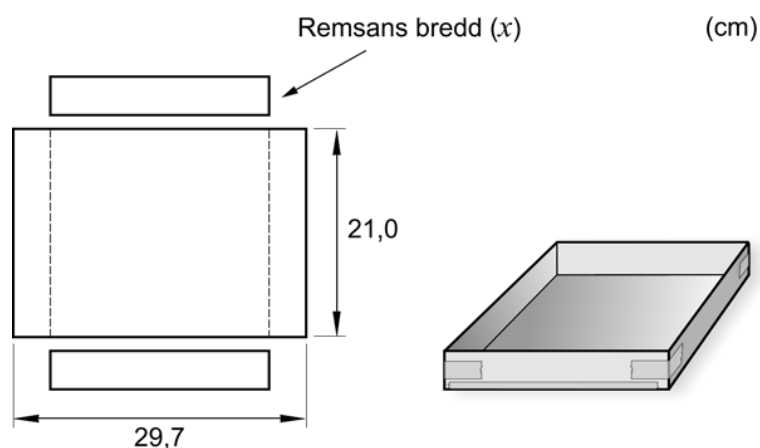
Svar b) 0,42.

Kommentar Vi brukar skilja på dragning med återläggning och dragning utan återläggning. I detta fall är denna skillnad icke aktuell då vi drar hane σ^7 och hona φ ur olika populationer och bara gör ett drag ur varje population. Skillnad mellan dragning med respektive utan återläggning märks först vid andra draget.

Del 2 # 16 **(0/2/⊗)** **Låda med volymen $2\,000\text{ cm}^3$.**

- 16.** Kalle och Lisa ska tillverka var sin öppen låda. De har några kartongark i A4-format med måtten $21,0\text{ cm} \times 29,7\text{ cm}$.

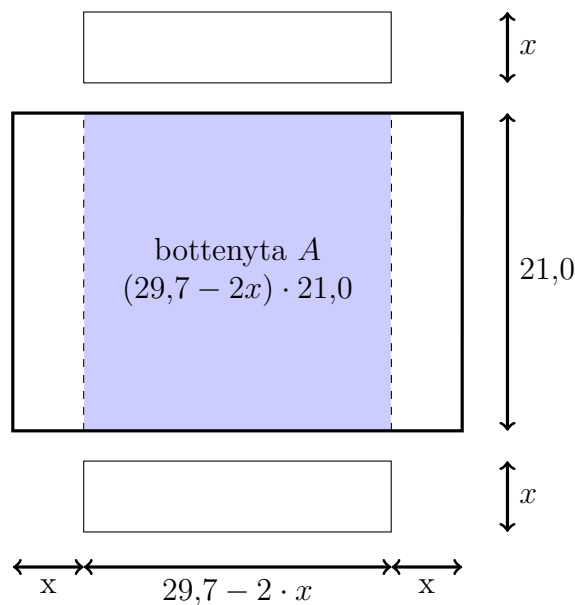
Först tar de var sitt ark och viker upp kortsidorna och sedan klipper de till två remsor av ett annat ark och tejpar fast dem på långsidorna, se figuren. Bredden på remsorna blir höjden på lådan. De vill båda tillverka en låda med volymen 2000 cm^3 . Efter en stunds pysslande har de gjort var sin låda.



Kalles remsor är bredare än Lisas.

Är det möjligt att Kalle och Lisa har tillverkat var sin låda med volymen 2000 cm^3 ?

(0/2/⊗)



Lådans bottenyta A är

$$A = (29,7 - 2x) \cdot 21,0$$

och med höjden x blir volymen

$$V = (29,7 - 2x) \cdot 21,0 \cdot x.$$

Välj x så att volymen blir 2000 cm^3 . Lös ekvationen

$$2000 = (29,7 - 2x) \cdot 21,0 \cdot x.$$

Använd pq-formeln som finns i FORMELSAMLINGEN och skriv på normaliserad form.

Regler

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

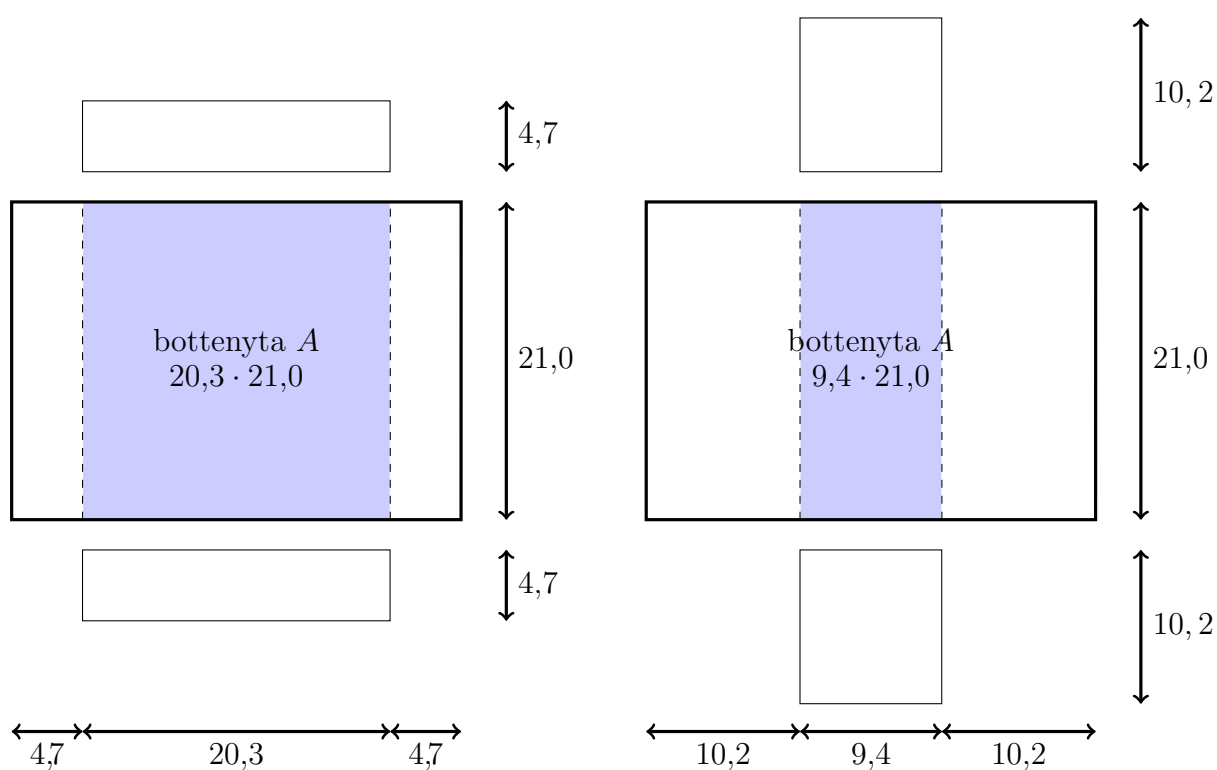
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Andragradsekvationer

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2000}{21} &= 29,7 \cdot x - 2x^2. \\
 0 &= -2x^2 + 29,7 \cdot x - \frac{2000}{21} \\
 0 &= x^2 - \underbrace{\frac{29,7}{2}}_{p=-14,85} x + \underbrace{\frac{2000}{42,0}}_{q=47,619} \\
 x &= 7,425 \pm \sqrt{7,425^2 - 47,619} = 7,425 \pm 2,4707 \\
 x_1 &= 10,166 \\
 x_2 &= 4,684
 \end{aligned}$$



Svar Det finns två olika möjliga lådor med volymen 2000 cm^3 , en med låga kanter och stor bottenyta och en med höga kanter med liten bottenarea.

Del 2 # 17 (0/3/⊗) Ekvationssystem

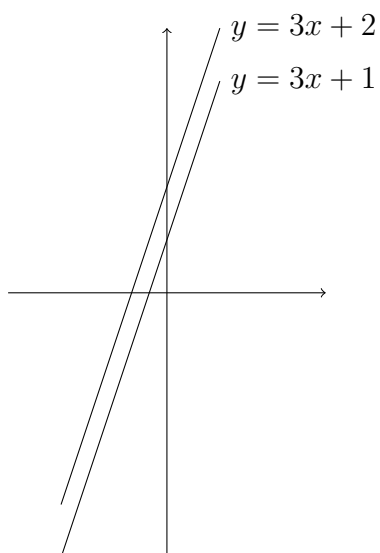
17. a) I ekvationssystemet $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = kx + 2 \end{cases}$ är k en konstant.
För vilket eller vilka värden på k saknar ekvationssystemet lösning? Förklara.

(0/1)

- b) I ekvationssystemet $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = ax + b \end{cases}$ är a och b konstanter.
Hur många lösningar får ekvationssystemet för olika värden på a och b ? Förklara.

(0/2/∞)

a)

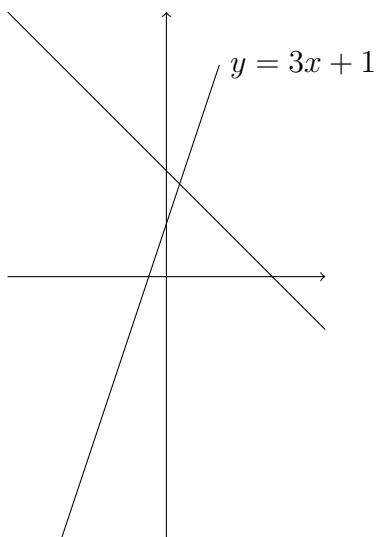


Svar a) Linjer med lika k är parallella och skär aldrig varandra. Lösning saknas då $k = 3$.

b) Tre olika fall finns.

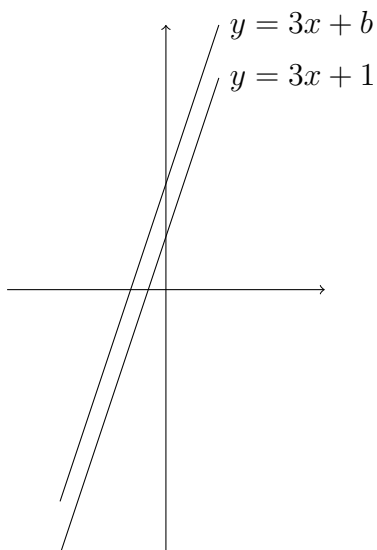
entydig lösning

$$k \neq 3$$



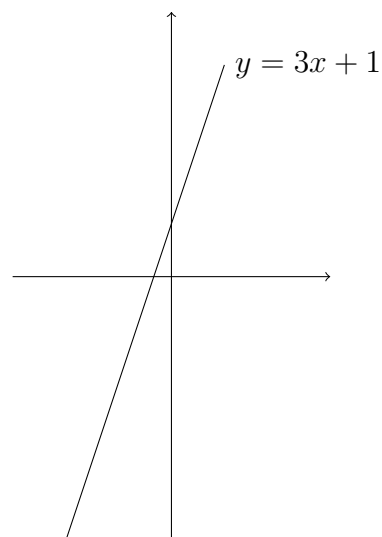
lösning saknas

$$k = 3 \text{ och } b \neq 1$$



oändligt antal lösningar

$$k = 3 \text{ och } b = 1$$



$$k \neq 3$$

två icke parallella linjer skär varandra

$$k = 3 \text{ och } b \neq 1$$

två parallella skilda linjer skär icke varandra

$$k = 3 \text{ och } b = 1$$

två identiska linjer ger att alla punkter på linjen är lösning

entydig lösning

lösning saknas

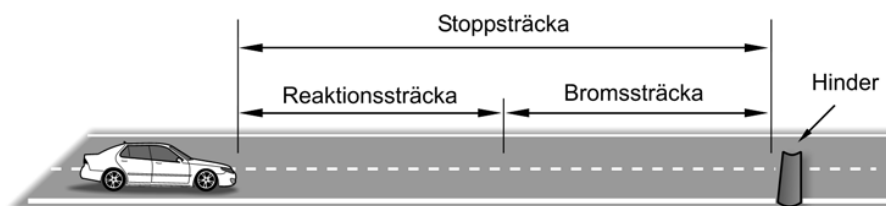
oändligt antal lösningar

Svar b) Se ovan.

Del 2 # 18 (3/4/⊗) Stoppsträcka

18. I samband med bilkörning brukar man tala om *stoppsträcka* i situationer då föraren upptäcker ett hinder, bromsar in och stannar.

Stoppsträckan s kan delas in i två delar. Den första delen, *reaktionssträckan*, är den sträcka bilen kör från det att föraren ser ett hinder till dess att föraren reagerar och trycker på bromspedalen. Den andra delen, *bromssträckan*, är den sträcka som bilen kör då föraren bromsar in och stannar, se figur.



Stoppsträckan s vid ett visst väglag kan beräknas enligt följande formel:

$$s = \underbrace{0,27v}_{\text{Reaktionssträcka}} + \underbrace{0,005v^2}_{\text{Bromssträcka}}$$

där stoppsträckan s anges i meter och hastigheten v anges i km/h.

- Beräkna reaktionssträcka, bromssträcka och stoppsträcka för några hastigheter, t.ex. 70 km/h, 90 km/h och 110 km/h. Rita en tabell och fyll i dina värden.

Hastighet (km/h)	Reaktionssträcka (m)	Bromssträcka (m)	Stoppsträcka (m)
70			
90			
110			

Vid landsvägskörning i mörker lyser halvljusen upp vägen ca 50 meter framför bilen. Det är vid det avståndet föraren tidigast kan upptäcka ett hinder.

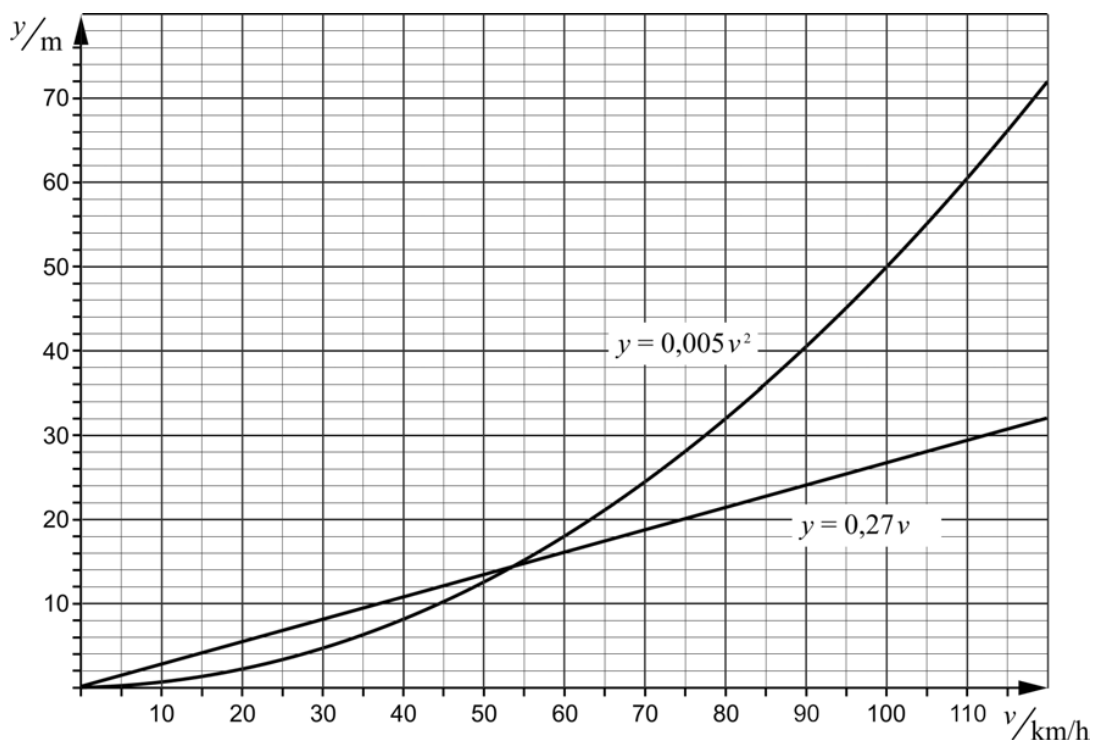
- Kommentera möjligheten att kunna stanna på 50 meter.

Enligt formeln för stoppsträckan $s = 0,27v + 0,005v^2$ hinner föraren inte stanna före ett hinder som upptäcks då avståndet till hindret är 50 meter och föraren kör med hastigheten 110 km/h.

- Om bilen kan passera hindret och föraren fortsätter att bromsa, hur långt bortom hindret stannar då bilen?
- Vilken hastighet har bilen när den är vid hindret?

Om du vill kan du ta hjälp av diagrammet nedan.

Reaktionssträcka och bromssträcka som funktion av hastigheten



- Undersök och beskriv sambandet mellan den ursprungliga hastigheten v_1 km/h en bil har när en förare upptäcker ett hinder på 50 meters håll och den hastighet v_2 km/h bilen har när den är vid hindret.

(3/4/□)

Vid bedömningen av ditt arbete med följande uppgift kommer läraren att ta hänsyn till:

- Hur väl du genomför dina beräkningar
- Hur väl du redovisar och kommenterar ditt arbete
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Vilka matematiska kunskaper du visar
- Hur väl du använder det matematiska språket
- Hur generell din lösning är

- Beräkna reaktionssträcka, bromssträcka och stoppsträcka för några hastigheter, t.ex. 70 km/h, 90 km/h och 110 km/h. Rita en tabell och fyll i dina värden.

Ifylld ser tabellen ut på följande sätt.

Hastighet (km/h)	Reaktionssträcka (m)	Bromssträcka (m)	Stoppsträcka (m)
70	$0,27 \cdot 70 = 18,9$	$0,005 \cdot 70^2 = 24,5$	$18,9 + 24,5 = 43,8$
90	$0,27 \cdot 90 = 24,3$	$0,005 \cdot 90^2 = 40,5$	$24,3 + 40,5 = 64,8$
110	$0,27 \cdot 110 = 29,7$	$0,005 \cdot 110^2 = 60,5$	$29,7 + 60,5 = 90,2$

- Kommentera möjligheten att kunna stanna på 50 meter

Denna uppgift kan lösas analytiskt eller numeriskt/grafiskt.

Alternativ: analytiskt lösning. Stoppa in $s = 50$ i formeln för stoppsträckan och lös ut v med pq-formeln.

$$\underbrace{50}_s = \underbrace{0,27 \cdot v + 0,005 \cdot v^2}_{\text{pq-formeln ger } v}$$

$$0 = 0,27 \cdot v + 0,005 \cdot v^2 - 50$$

Normalisera ekvationen, alltså ordna så att koefficienten framför v^2 blir 1. Dividera alla termer i ekvationen med 0,005.

$$0 = v^2 + 54v - 10\,000$$

$$v_{1,2} = -27 \pm \sqrt{27^2 + 10\,000}$$

$$v_1 = -27 + \sqrt{27^2 + 10\,000} \approx 76,6$$

$$v_2 \approx -130,6 \quad \text{negativ rot, ej intressant}$$

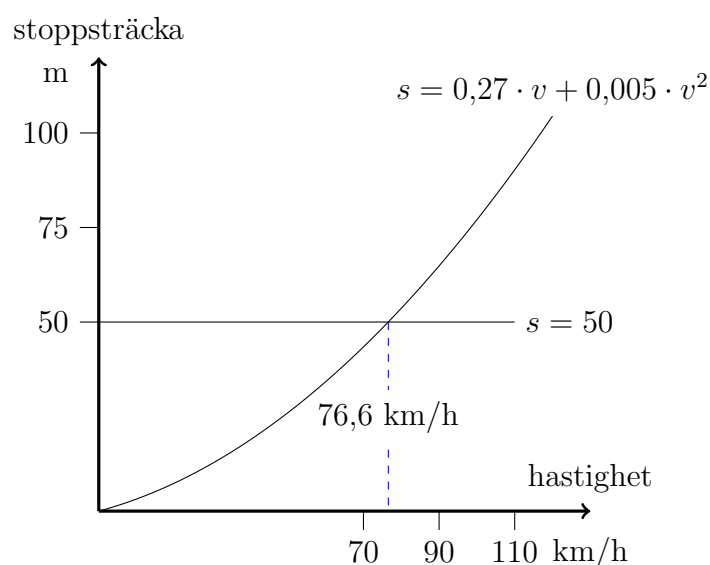
Alternativ: grafisk/numerisk lösning. Den ekvation som ska lösas är

$$\overbrace{50}^{\text{vänsterled}} = \overbrace{0,27 \cdot v + 0,005 \cdot v^2}^{\text{högerled}}.$$

Använd grafritande miniräknare. Plotta vänsterled och högerled och bestäm skärningspunkten.

Kommandon till Texas-räknare

Y=	mata in funktion
GRAPH	rita graf
WINDOW	välj fönster, standard är $X_{\min} = -10$, $X_{\max} = 10$, $Y_{\min} = -10$, $Y_{\max} = 10$ i detta problem är det lämpligare med $X_{\min} = 0$, $X_{\max} = 100$, $Y_{\min} = 0$, $Y_{\max} = 100$
TRACE	ger cursorns x - och y -koordinat på kurva
2ND CALC	välj intersect i denna uppgift för att bestämma skärningspunkt



Uppgiften gäller att bestämma *för vilka hastigheter* det är möjligt att stanna vid hindret. Den högsta möjliga hastigheten v är 76,6 och den lägsta är $0 < v$ km/h. Hastigheten noll är inte möjlig.

Svar Möjliga hastigheter är $0 < v \leq 76,6$ km/h.

- Om bilen kan passera hindret och föraren fortsätter att bromsa, hur långt bortom hindret stannar då bilen?

Enligt tabellen är stoppsträckan 90,2 meter, det är 40,2 meter efter hindret.

Svar 40,2 meter

- Vilken hastighet har bilen när den är vid hindret?

Enligt uppgiften gäller att stoppsträckan s är

$$s = \underbrace{0,27 \cdot v}_{\text{reaktionssträcka}} + \underbrace{0,005 \cdot v^2}_{\text{bromssträcka}}.$$

Antag att bilens hastighet vid hindret är u km/h. Enligt tidigare är bromssträckan efter hindret 40,2 meter. Formeln för bromssträcka ger

$$40,2 = 0,005 \cdot \underbrace{u^2}_{u=89,666}$$

Svar Hastigheten vid hindret är 89,7 km/h.

- Undersök och beskriv sambandet mellan den ursprungliga hastigheten v_1 km/h en bil har när en förare upptäcker ett hinder på 50 meters håll och den hastighet v_2 km/h bilen har när den är vid hindret.

Låt v vara utgångshastighet och u hastigheten vid hindret. Utgångspunkt för sambandet u och v är

$$\underbrace{0,005 \cdot u^2}_{\text{bromssträcka från } u \text{ km/h}} = \underbrace{0,27 \cdot v + 0,005 \cdot v^2 - 50}_{\text{stoppsträcka bortom hindret}}$$

som kan förenklas till

$$u^2 = 54 \cdot v + v^2 - 10\,000.$$

Detta samband gäller för sådana v att högerledet är positivt. För $v \leq 0$ gäller att lösning saknas och för utgångshastigheter så låga att hindret inte passeras gäller att $u = 0$.

Svar

$$u = \begin{cases} \text{lösning saknas} & : & v \leq 0 \\ 0 & : & 0 < v \leq -27 + \sqrt{27^2 + 10\,000} \\ \sqrt{54v + v^2 - 10\,000} & : & -27 + \sqrt{27^2 + 10\,000} \leq v \end{cases}$$

Kommentar I Skolverkets rättningsnorm förekommer endast svaret

$u = \sqrt{54v + v^2 - 10\,000}$ på deluppgiften *undersök och beskriv sambandet mellan ...*

Skolverkets rättningsnorm behandlar alltså enbart fallet att bilen passerar hindret.