Innehåll

Förord 2

NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS B HÖSTEN 2000 3

Del I, 10 kortsvarsuppgifter med miniräknare 4

Del II, 9 uppgifter med miniräknare, fullständiga lösningar 7

Del III, 1 stor uppgift med miniräknare, fullständig lösning 10

MaB HT 2000 LÖSNINGAR 12

Del I, 10 kortsvarsuppgifter med miniräknare 12

Del 1 # 1	(1/0)	Sannolikhet	12
Del 1 # 2	(1/0)	Olikhet	13
Del 1 # 3	(1/0)	Likformighet	14
Del 1 # 4	(1/0)	Konjugatregeln	15
Del 1 # 5	(3/0)	Graf till funktion	16
Del 1 # 6	(2/0)	Randvinkelsatsen och vinklar	17
Del 1 # 7	(1/0)	Förenkla	18
Del 1 # 8	(0/1)	Ekvationssystem	19
Del 1 # 9	(0/1)	Linje	20
Del 1 # 10	(0/1)	Olikheter	21

Del II, 9 uppgifter med miniräknare, fullständiga lösningar 22

Del 2 # 11	(4/0)	Lös ekvationen	22
Del 2 # 12	(2/0)	Linjärt ekvationssystem	23
Del 2 # 13	(4/1)	Sannolikhet	25
Del 2 # 14	(2/0)	Rät linje	27
Del 2 # 15	(0/2)	Liksidig triangel	28
Del 2 # 16	(0/2/⊗)	Median	29
Del 2 # 17	(0/4)	Välvt tak	30
Del 2 # 18	(0/4/⊗)	Pappersark	32
Del 2 # 19	(0/3)	Sannolikhet	34

Del III, 1 stor uppgift med miniräknare, fullständig lösning 35

Del 3 # 20	(4/7/⊗)	Skärningar mellan kurvan $y = x^2$ och räta linjer	35

Förord

Skolverket har endast publicerat *ett* kursprov till kursen Ma 2. Innehållet i den äldre kursen Ma B hör nu till Ma 1 och/eller Ma 2. I tabellen nedan framgår vilka uppgifter som är lämpliga till respektive kurs.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ma 1	1	2											13						19	
Ma 2a																				
Ma 2bc																				

Kom ihåg
- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan
- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Del 1 # 1 (1/0) Sannolikhet

1. I en burk finns enbart röda och svarta kulor. Sannolikheten att dra en röd kula ur burken är 75 %.

Ge ett förslag på hur många röda och svarta kulor det kan finnas i burken.

Svar: ______________________________ (1/0)

Det finns många olika möjliga svar.

Svar 1) 75 röda och 25 svarta kulor.

Svar 2) 3 röda och 1 svart kula.

Del 1 # 2 (1/0) Olikhet

2. Ange något värde på x så att $2x - 1 < 3$ Svar:________________ (1/0)

Notera problemets formulering: ange *något* värde. Vi behöver alltså inte ange en fullständig lösning till olikheten utan endast *något* värde. Försök med något enkelt, exempelvis $x = 0$. Med $x = 0$ får vi $-1 < 3$ vilket är sant. Alltså duger $x = 0$.

Svar $x = 0$.

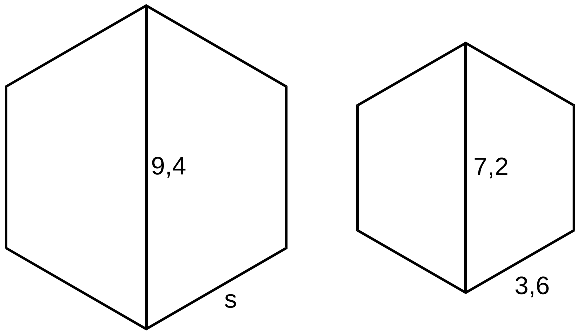
Kommentar. Om uppgiften hade varit att lösa olikheten så blir lösningen följande.

$$
\begin{array}{llll}
2x - 1 & < 3 & & \\
2x - 1 + 1 & < 3 + 1 & & \text{addera 1 till bägge sidor} \\
2x & < 4 & & \\
x & < 2 & & \text{dividera med 2}
\end{array}
$$

Räknereglerna för likheter gäller också för olikheter med ett viktigt undantag. Vid multiplikation eller division med negativt tal så byter olikhetstecknet riktning.

Del 1 # 3 (1/0) Likformighet

3. Följande två sexhörningar är likformiga. Bestäm s. Svar:__________ (1/0)



Att figurerna är likformiga betyder

$$\frac{s}{9{,}4} = \frac{3{,}6}{7{,}2}$$

$$s = \frac{3{,}6}{7{,}2} \cdot 9{,}4 = 0{,}5 \cdot 9{,}4 = 4{,}7$$

Svar 4,7

Del 1 # 4 (1/0) Konjugatregeln

4. Vilket av följande uttryck är en förenkling av $(x-2)(x+2)$?

A. $x^2 - 4x + 4$

B. $x^2 + 4x + 4$

C. $x^2 + 4$

D. $x^2 - 4$

E. $x^2 + 2x$

F. $x^2 - 2x$

Svar: ______________ (1/0)

Använd FORMELSAMLINGEN.

Regler

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Andragradsekvationer

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Konjugatregeln ger att $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$. Alternativ D är rätt.

Svar Alternativ D med $x^2 - 4$ är rätt.

Del 1 # 5 (3/0) Graf till funktion

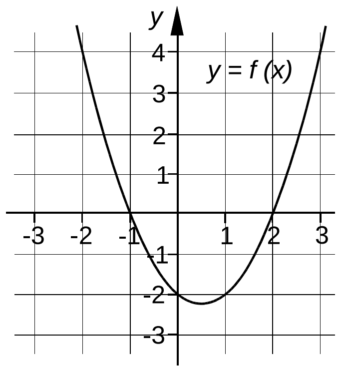
5. Figuren till höger visar grafen till en funktion $y = f(x)$

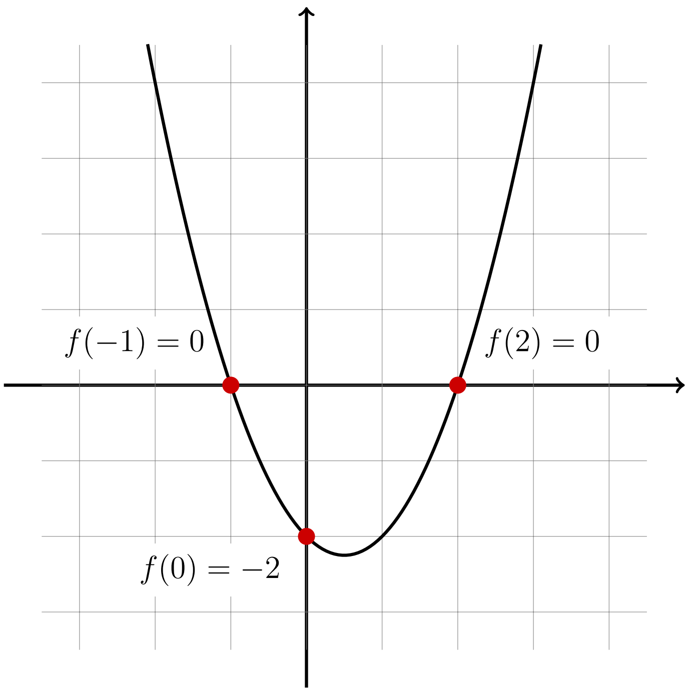
a) Bestäm $f(0)$

Svar:________________ (1/0)

b) Ange lösningarna till ekvationen $f(x) = 0$

Svar: ________________ (2/0)





a) Bestäm $f(0)$

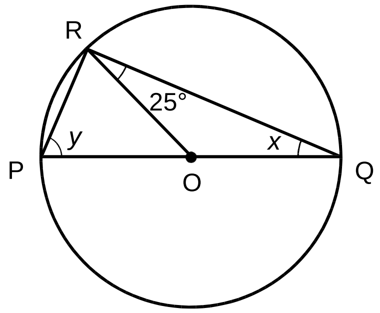
Svar a) $f(0) = -2$.

b) Lösningarna till $f(x) = 0$

Svar b) $x_1 = -1$ och $x_2 = 2$.

Del 1 # 6 (2/0) Randvinkelsatsen och vinklar

6. Punkterna P, Q och R ligger på en cirkel. O är cirkelns medelpunkt. PQ är cirkelns diameter.



a) Bestäm vinkeln *x*. Svar:____________ (1/0)

b) Bestäm vinkeln *y*. Svar:____________ (1/0)

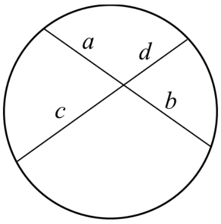
a) Bestäm vinkeln x Triangeln ORQ är likbent eftersom sträkorna OR och OQ är lika. Då blir $x = 25°$.

Svar a) Vinkeln $x = 25°$.

b) Bestäm vinkeln y Använd FORMELSAMLINGEN där finns randvinkelsatsen.

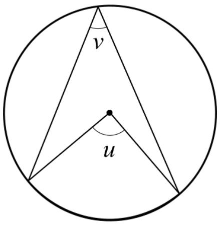
Kordasatsen

$ab = cd$



Randvinkelsatsen

$u = 2v$



Symbolen $\angle$ betecknar vinkel. Enligt randvinkelsatsen gäller att

$$\angle POR = 2 \cdot \angle PQR = 50°$$

Triangeln OPR är likbent vilket ger

$$\angle ORP = \angle OPR = y$$

Triangeln OPR har vinkelsumman 180°

$$180° = y + y + 50°$$

Då blir

$$y = 65°$$

Svar b) Vinkeln $y = 65°$.

Del 1 # 7 (1/0) Förenkla

7. Vilka *tre* av följande uttryck kan förenklas till t ?

A. $\frac{t^2}{t}$

B. $\frac{t+t}{t}$

C. $2t-t$

D. t^2-t

E. $\frac{t}{2}+\frac{t}{2}$

Svar:__________________ (1/0)

A	$\frac{t^2}{t}$	$=$	t	Förenklas till t
B	$\frac{t+t}{t}$	$=$	2	
C	$2\,t-t$	$=$	t	Förenklas till t
D	t^2-t	$=$	t^2-t	
E	$\frac{t}{2}+\frac{t}{2}$	$=$	t	Förenklas till t

Svar Fallen A, C och E kan förenklas till t.

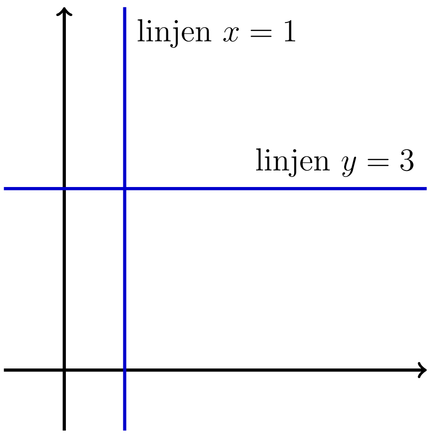
Del 1 # 8 (0/1) Ekvationssystem

8. Ge ett exempel på ett ekvationssystem som har lösningen $x = 1$ och $y = 3$.

Svar:______________ (0/1)

Svar $x = 1$ och $y = 3$ som är ett ovanligt enkelt ekvationssystem.

Kommentar Geometriskt kan ekvationerna till ett ekvationssystem med två obekanta tolkas som två räta linjer i ett plan. Lösningen är linjernas skärningspunkt. Du behöver inte rita grafen för att få poäng.



Kommentar $2x = 2$ och $3y = 9$ är också ovanligt enkelt.

Kommentar Skolverket ger i sin rättningsnorm följande möjliga svar.

8. **Max 0/1**

Godtagbart ekvationssystem $\left(\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 3 \end{cases}\right)$ +1 vg

Det finns naturligtvis oändligt många olika system av ekvationer som har lösningen $x = 1$ och $y = 3$.

Del 1 # 9 (0/1) Linje

9. Punkten $(50, a)$ ligger på linjen med ekvationen $2x + y = 5$

Bestäm a. Svar:________________ (0/1)

Linjens ekvation är

$$2 \cdot x + y \quad = 5$$

och punkten $(50, a)$ ligger på linjen vilket ger

$$2 \cdot \overbrace{x}^{x=50} + \underbrace{y}_{y=-95} \quad = 5$$

Svar $a = -95$

Del 1 # 10 (0/1) Olikheter

10. Summan av två tal, x och y, är minst lika stor som deras produkt.

Hur skrivs detta villkor med hjälp av matematiska tecken och symboler?

A. $x + y \leq xy$
B. $x + y \geq xy$
C. $x + y < xy$
D. $x + y > xy$
E. $x + y = xy$ Svar:_______________ (0/1)

Enligt svensk standard för matematiska beteckningar gäller

Beteckning	Tillämpning	Benämning eller betydelse
$=$	$x = y$	likhetstecken x är lika med y
$\neq$	$x \neq y$	olikhetstecken x är inte lika med y
$\leq$	$x \leq y$	är mindre än eller lika med x är mindre än eller lika med y
$\geq$	$x \geq y$	är större än eller lika med x är större än eller lika med y
$<$	$x < y$	är mindre än x är mindre än y
$>$	$x > y$	är större än x är större än y
$\ll$	$x \ll y$	är mycket mindre än x är mycket mindre än y
$\gg$	$x \gg y$	är mycket större än x är mycket större än y
$\approx$	$x \approx y$	approximationstecken x är ungefär lika med y x är approximativt lika med y
$\sim$	$x \sim y$	proportionalitetstecken x är proportionell mot y
Inom geometrin betyder tecknet		$\sim$ är likformig med $\cong$ är kongruent med

Frågan gäller tolkningen av den språkliga varianten *minst lika stor som*. Rätt svar är B.

Svar Alternativ B.

Del 2 # 11 (4/0) Lös ekvationen

11. Lös ekvationerna

a) $x^2 - 4x - 45 = 0$ (2/0)

b) $18 - 3x = 3x^2$ (2/0)

Deluppgift A

Lös ekvationen $x^2 - 4\,x - 45 = 0$. Använd FORMELSAMLING.

Regler	**Andragradsekvationer**
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$x^2 + px + q = 0$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	

Lös ekvationen

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 \underbrace{-4}_{p=-4}\,x \underbrace{-45}_{q=-45} \\ x_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - (-45)} = 2 \pm \sqrt{49} = 2 \pm 7 = 9 \end{aligned}$$

Svar A $x_1 = 9$ och $x_2 = -5$

TIPS: Kontrollera alltid att lösningen uppfyller ekvationen.

Deluppgift B

Lös ekvationen $18 - 3\,x = 3\,x^2$. Använd FORMELSAMLINGEN.

Börja med att städa upp. Skriv om som

$$0 = \underbrace{3}_{\text{ska vara 1}} \cdot x^2 + 3\,x - 18$$

Normalisera ekvationen. Alltså dividera (dela) ekvationen med 3. Vi får då en ekvation som ser ut som i FORMELSAMLINGEN.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + x - 6 \\ x_1 &= -0,5 + \sqrt{0,5^2 - (-6)} = -0,5 + \sqrt{6,25} = -0,5 + 2,5 = 2 \\ x_2 &= -0,5 - \sqrt{0,5^2 - (-6)} = -0,5 - 2,5 = -3 \end{aligned}$$

Svar B $x_1 = 2$ och $x_2 = -3$

Del 2 # 12 (2/0) Linjärt ekvationssystem

12. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x - 6y = 2 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$$

(2/0)

Ett ekvationssystem med två obekanta löses enklast med substitutionsmetoden.

$$\begin{array}{rcrcl} 3\,x & - & 6\,y & = & 2 \\ 2\,x & - & 2\,y & = & 1 \end{array}$$

Välj nedre ekvationen och x och flytta om så att x blir ensamt i vänsterledet. Behåll första ekvationen oförändrad.

$$\begin{aligned} 3\,x - 6\,y &= 2 \\ x &= \frac{1}{2} + y \end{aligned}$$

Substituera x i övre ekvationen.

$$\begin{aligned} 3\,(\frac{1}{2} + y) - 6\,y &= 2 \\ x &= \frac{1}{2} + y \end{aligned}$$

Skapa ordning i övre ekvationen, förenkla.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} + 3\,y - 6\,y &= 2 \\ x &= \frac{1}{2} + y \end{aligned}$$

Förenklingen ger

$$\begin{aligned} -3\,y &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{2} + y \end{aligned}$$

Bestäm y ur övre ekvationen

$$\begin{aligned} y &= \frac{-1}{6} \\ x &= \frac{1}{2} + y \end{aligned}$$

Det återstår att bestämma y, använd nedre ekvationen.

$$x = \frac{1}{2} + \frac{-1}{6} = \frac{1}{3}$$

Svar $x = \frac{1}{3}$ och $y = \frac{-1}{3}$

Kommentar För system med fler än två obekanta är substitutionsmetoden icke lämplig.

Alternativ lösning

Lös ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcrcll} 3\,x & - & 6\,y & = & 2 & \text{1:a ekvationen} \\ 2\,x & - & 2\,y & = & 1 & \text{2:a ekvationen} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcll} 3\,x & - & 6\,y & = & 2 & \text{1:a ekvationen} \\ & - & 2\,y-(-4\,y) & = & 1-\frac{4}{3} & \text{ny 2:a ekv} = \text{2:a ekv - } \frac{2}{3}\times \text{ 1:a ekv} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcll} 3\,x & - & 6\,y & = & 2 & \text{1:a ekvationen} \\ & & 2\,y & = & -\frac{1}{3} & \text{ger } y = \frac{-1}{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcll} 3\,x & - & 6\,y & = & 2 & y = \frac{-1}{6} \text{ ger } x = \frac{1}{3} \\ & & 2\,y & = & -\frac{1}{3} & y = \frac{-1}{6} \end{array}$$

Svar $x = \dfrac{1}{3}$ och $y = \dfrac{-1}{6}$.

Kommentar Svara exakt, svara *inte* med decimaltal 0,3333 eller $-0{,}1667$.

Del 2 # 13 (4/1) Sannolikhet

13. TRISS-lotten är en populär skraplott. På baksidan av en TRISS-lott finns följande vinstplan:

Vinstplan för 8 000 000 lotter.
Vid annat antal lotter ändras vinstplanen proportionellt.
* ** Snittbelopp i offentliga TV–dragningar.

Antal		Vinst	Total
4	x	2 500 000 kr*	10 000 000 kr
16	x	250 000 kr**	4 000 000 kr
64	x	100 000 kr	6 400 000 kr
608	x	10 000 kr	6 080 000 kr
2 528	x	1 000 kr	2 528 000 kr
56 000	x	100 kr	5 600 000 kr
165 280	x	75 kr	12 396 000 kr
664 000	x	50 kr	33 200 000 kr
712 000	x	25 kr	17 800 000 kr
1 600 500			98 004 000 kr

*Lotter med 3 KLÖVER. Väljer vinnaren engångsbelopp istället för månadsbelopp utbetalas 500 000 kr.

**Lotter med 3 TV–RUTOR.

a) Beräkna sannolikheten för att du får en vinst om du köper en TRISS-lott. (1/0)

b) Beräkna sannolikheten för att du får en vinst som är större än 10 000 kr om du köper en trisslott. (2/0)

c) Om du köper 1 trisslott i veckan under ett år, hur många 25 kronorsvinster kan du rimligen förvänta dig att få under året? (1/1)

a) Totala antalet lotter är 8 000 000 varav 1 600 500 är vinter. Sannolikhet för vinst är $\dfrac{1\,600\,500}{8\,000\,000} = 0{,}20006$.

Svar a) Sannolikheten för vinst är 0,20 alternativt uttryckt som 20%.

b) Vinstplanen är

Antal	Vinst	
4	2 500 000 kr	
16	250 000 kr	
64	100 000 kr	
608	10 000 kr	ej över 10 000 kr

Det finns $4 + 16 + 64 = 84$ vinster över 10 000 kr. Sannolikheten att få en vinst över 10 000 kr är $\frac{84}{8\,000\,000} = 0{,}0000105$.

Svar b) Sannolikheten att få en vinst över 10 000 kr är 0,0000105 vilket är ungefär 1 chans på 100 000.

c) Av 8 000 000 lotter är 712 000 25-kronorsvinster. Sannolikheten att en vecka vinna 25 kronor är $\frac{712\,000}{8\,000\,000}$. Ett år har 52 veckor. Lottdragningen olika veckor är oberoende händelser. Uttrycket *förväntas* ska tolkas som medelvärde i det långa loppet.
Sannolikheterna "adderas", $\frac{52 \times 712\,000}{8\,000\,000} = 4{,}628$.

Svar c) Det är rimligt att förvänta 4,6 vinster.

Kommentar Skolverkets rättningsnorm skriver följande.

c)	Redovisad godtagbar beräkning av sannolikheten för en 25 kronorsvinst	+1 g
	Redovisad godtagbar beräkning av antalet vinster (4,6 vinster)	+1 vg

Naturligtvis är det rimligt att förvänta att antalet vinster är ett heltal, 1, 2, 3, 4, 5 .... Logiskt finns inte bråkdelar av vinster men uttrycket *förväntas* ska tolkas som medelvärde i långa loppet.

Kommentar Tabellen visar sannolikheten för antal vinster vid köp av en lott varje vecka under ett år. Om frågan hade gällt typvärde är svaret 4 vinster. Att beräkna denna tabell ingår *inte* i kursen Ma1 eller MaB.

Antal vinster	Sannolikhet %	
0	0,8	
1	4,0	
2	9,9	
3	16,2	
4	19,4	sannolikast utfall
5	18,2	
6	13,9	
7	8,9	
8	4,9	
9	2,3	
10	1,0	
11	0,4	
12	0,1	

Del 2 # 14 (2/0) Rät linje

14. En rät linje går genom punkterna $(-1, 3)$ och $(1, 9)$.
Bestäm linjens ekvation på formen $y = kx + m$ (2/0)

Använd FORMELSAMLINGEN.

Räta linjen		**Andragradsfunktioner**	
$y = kx + m$	$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$y = ax^2 + bx + c$	$a \neq 0$

Givet är

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= (-1, 3)\\(x_2, y_2) &= (1, 9)\end{aligned}$$

Då blir

$$k = \frac{9-3}{1-(-1)} = \frac{6}{2} = 3.$$

Nu återstår att bestämma m. Använd formeln $y = k\,x + m$ och någon av de två kända punkterna. Med punkten $(-1, 3)$ får vi

$$3 = 3 \cdot (-1) + m$$

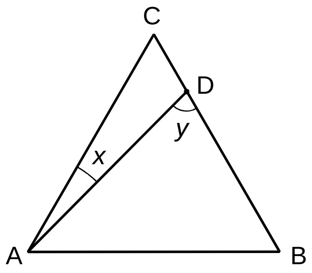
vilket ger

$$m = 6$$

Svar Linjens ekvation är $y = 3\,x + 6$.

Del 2 # 15 (0/2) Liksidig triangel

15.



ABC är en liksidig triangel. Sträckan AD bildar vinklarna *x* och *y* med triangelsidorna såsom figuren visar.

Bestäm sambandet mellan *x* och *y*.

Triangeln ABC är likbent och därmed är alla vinklarna lika $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

Lösning 1/ Studera triangeln ACD.

$$\begin{aligned}
\angle ACD &= 60^\circ \\
\angle CDA &= 180^\circ - y \\
\angle DAC &= x \\
\underbrace{\angle ACD + \angle CDA + \angle DAC}_{180^\circ} &= 60^\circ + (180^\circ - y) + x \\
0^\circ &= 60^\circ - y + x \\
y &= 60^\circ + x
\end{aligned}$$

Svar Sambandet är $y = 60^\circ + x$.

Lösning 2/ Studera triangeln ABD.

$$\begin{aligned}
\angle ABD &= 60^\circ \\
\angle BDA &= y \\
\angle DAB &= 60^\circ - x \\
\underbrace{\angle ABD + \angle BDA + \angle DAB}_{180^\circ} &= 60^\circ + y + (60^\circ - x) \\
180^\circ &= 120^\circ + y - x \\
60^\circ + x &= y
\end{aligned}$$

Svar Sambandet är $y = 60^\circ + x$.

Kommentar Det finnas nästan alltid flera olika möjliga lösningar.

Del 2 # 16 (0/2/⊗) Median

16. Förklara med ett exempel när det är lämpligt att använda median istället för medelvärde. (0/2/¤)

Talen

8 9 10 11 12

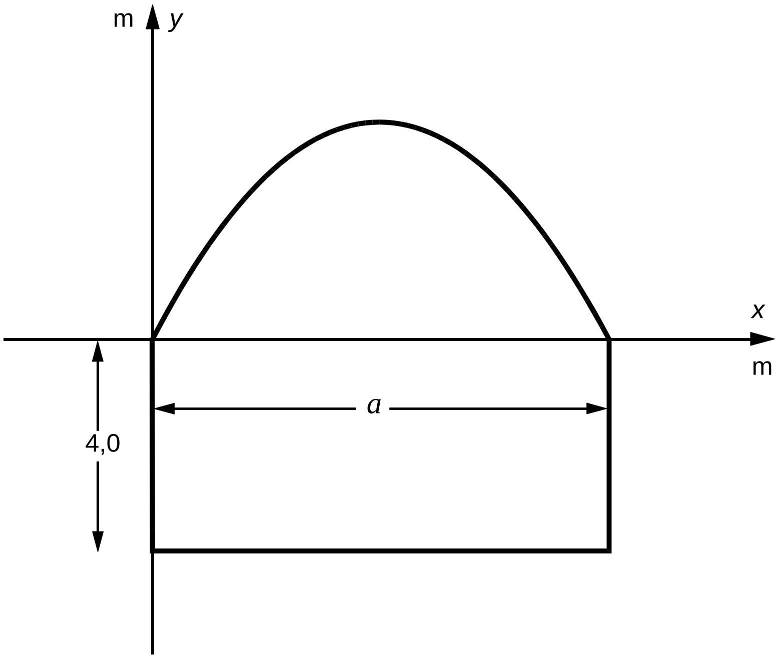
har medianvärdet 10 och medelvärdet 10. Båda lägesmått är lika. Talen

8 9 10 11 1012

har medianvärdet 10 och medelvärdet 210. Vilket lägesmått som är lämpligt att använda beror på syftet. När man vill att att kraftigt avvikande värden inte ska ha stort inflytande på lägesmåttet så är medianvärde lämpligare.

Del 2 # 17 (0/4) Välvt tak

17. En badmintonhall har ett välvt tak. I figuren nedan ser du badmintonhallens ena gavel inlagd i ett koordinatsystem. Det välvda taket blir då en kurva i koordinatsystemet. Denna kurva kan beskrivas genom sambandet $y = 0{,}67x - 0{,}028x^2$



a) Bestäm gavelns bredd *a*. (0/2)

b) Som du ser i figuren är hallens lägsta takhöjd 4,0 m.
Hur stor är den högsta takhöjden? (0/2)

Det välvda taket beskrivs med funktionen $y = 0,67\,x - 0,028\,x^2$.

Bestäm a

$$0 = \underbrace{x}_{x=0} \cdot \underbrace{(0,67 - 0,028\,x)}_{x=\frac{0,67}{0,028}=23,9}$$

Gavelns bredd blir

$$a = 23,93 \text{ m.}$$

Svar a) Bredden $a = 23,9$ m.

(Den andra lösningen $x = 0$ svarar mot vänster hörn.) Maximal höjd är mitt på gaveln, alltså för

$$x = \frac{a}{2} = \frac{23,93}{2} = 11,96 \approx 12 \text{ m}$$

då blir

$$y_{\max} = 0,67 \cdot 11,96 - 0,028 \cdot 11,96^2 = 4,001 \approx 4 \text{ m}$$

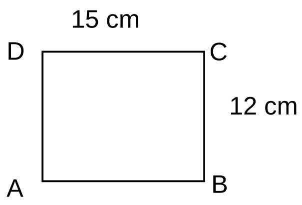
och den högsta takhöjden

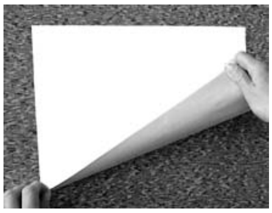
$$h_{\max} = 4 + 4 = 8 \text{ m.}$$

Svar b) Högsta takhöjden är 8 m.

Del 2 # 18 (0/4/⊗) Pappersark

18. ABCD är ett vitt rektangelformat pappersark med grå baksida (se vänstra figuren). Arket viks så att vikningslinjen går genom hörnet A och så att hörnet B hamnar på sidan CD (se högra figuren).

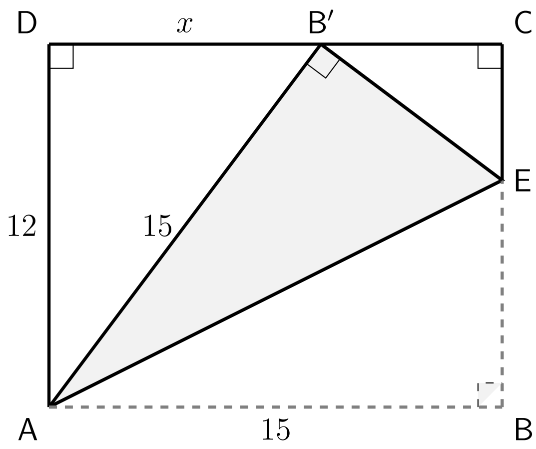




Beräkna arean av den uppvikta (grå) delen av pappersarket. (0/4/¤)
Beräkningar som bygger på uppmätta värden godtas ej.

Börja med att rita figuren. Vik upp hörnet B så att det hamnar på sidan CD och kalla punkten för B′, (uttalas B-prim).

Strategin för att beräkna arean av den uppvikta (grå) delen av pappersarket är att beräkna “alla okända” stäckor.



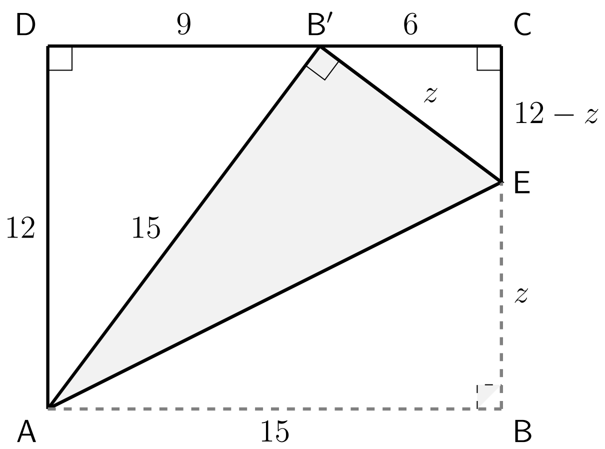
Starta med DB′, som enkelt kan beräknas med hjälp av Pythagoras sats.

$$15^2 = 12^2 + x^2$$

ger

$$x = 9.$$

Då längden av sidan DB′ är 9 cm blir B′C $15 - 9 = 6$ cm. Uppdatera figuren.



Längden av EB och EB′ är lika, kalla längden för z. Triangeln B′CE är rätvinklig. Pythagoras sats ger

$$\begin{aligned} z^2 &= 6^2 + \underbrace{(12-z)^2}_{144-24\,z+z^2} \\ 0 &= 36 + 144 - 24\,z \\ z &= \frac{36+144}{24} = \frac{180}{24} = 7{,}5 \end{aligned}$$

Arean hos triangeln AB′E blir

$$\text{area} = \frac{15 \cdot 7{,}5}{2} = 56{,}25$$

Svar Arean är 56,25 cm^2.

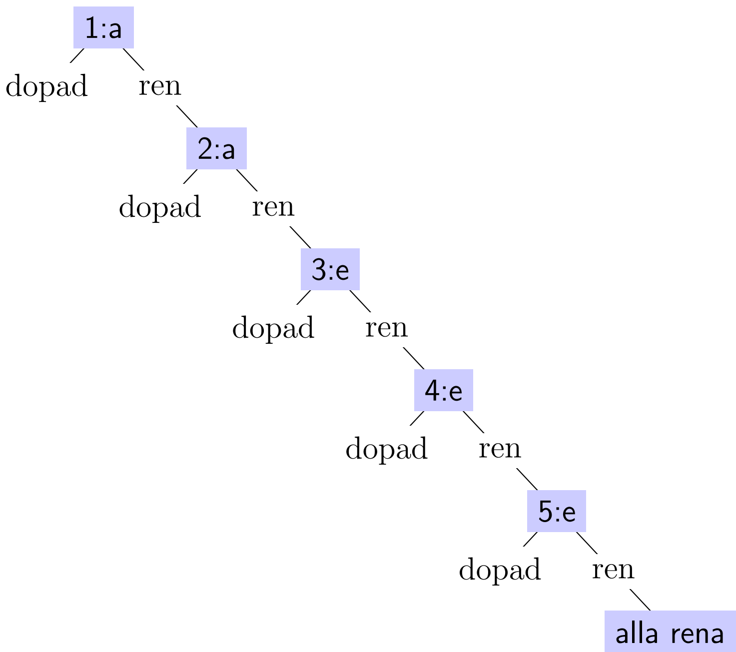
Del 2 # 19 (0/3) Sannolikhet

19. Vid OS och andra idrottstävlingar tas blodprov regelbundet för att kontrollera om deltagarna är dopade. Priset för att testa blod är dock ganska högt. För att minska antalet blodprovsundersökningar och ändå kunna hitta spår av dopingpreparat kan man göra på följande sätt.

Man blandar delar av fem stycken blodprov i ett enda provrör och gör ett test på blandningen i provröret. Det är bara om det finns otillåtna ämnen i blandningen som de fem blodproven måste undersökas separat.

Hur stor är sannolikheten att man måste undersöka blodproven separat?
Du kan anta att sannolikheten för att ett enskilt blodprov innehåller dopingrester är 0,015. (0/3)

Sannolikheten för att vara dopad är $P(\text{dopad}) = 0{,}015$. Då blir sannolikheten för att vara ren (komplementhändelsen) $P(\text{ren}) = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$.



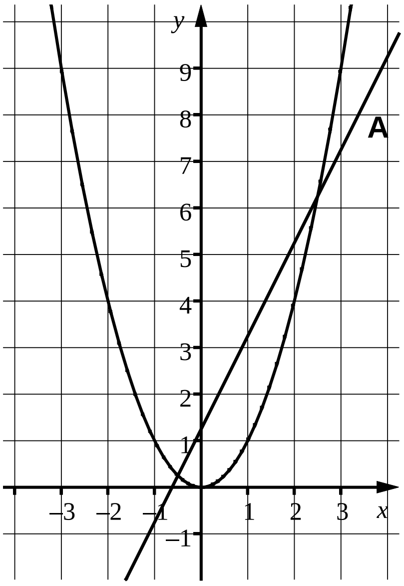
Sannolikheten för att alla 5 ska vara rena är

$$\begin{aligned} P(\text{alla rena}) &= P(\text{ren})^5 = 0{,}985^5 = 0.927216502365625 = 0{,}927 \\ P(\text{inte alla rena}) &= 1 - P(\text{alla rena}) = 0{,}073 \end{aligned}$$

Svar Sannolikheten att för att undersöka proven separat är 0,073.

Del 3 # 20 (4/7/⊗) Skärningar mellan kurvan $y = x^2$ och räta linjer

20. Skärningar mellan kurvan $y = x^2$ och räta linjer



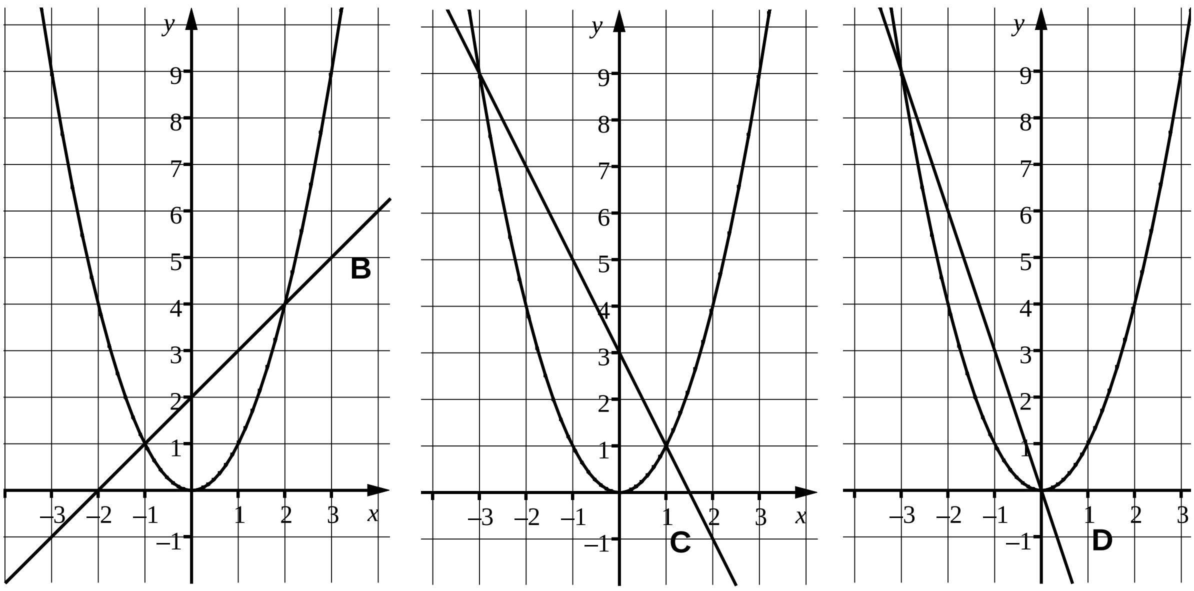
I figuren till vänster kan man avläsa x-koordinaterna för punkterna där kurvan och linjen A skär varandra:
För vänstra skärningspunkten: $x_1 = -0{,}5$
och för högra skärningspunkten: $x_2 = 2{,}5$

Därefter beräknas summan $x_1 + x_2 = 2$
och produkten $x_1 \cdot x_2 = -1{,}25$

Linjens k- och m-värde bestäms ur figuren till $k = 2$ och $m = 1{,}25$

Alla värden har förts in i tabellen på nästa sida.

- Gör motsvarande avläsningar i figurerna nedan. Fyll sedan i tabellen på nästa sida.



Linje		A	B	C	D
x-koordinaten för vänstra skärnings-punkten med kurvan	x_1	-0,5			
x-koordinaten för högra skärnings-punkten med kurvan	x_2	2,5			
Summan av x-koordinaterna	$x_1 + x_2$	2			
Produkten av x- koordina-terna	$x_1 \cdot x_2$	-1,25			
Linjens rikt-nings-koefficient	k	2			
y-koordinaten för skärnings-punkten med y-axeln	m	1,25			
Linjens ekva-tion		$y = 2x + 1{,}25$			

- Formulera i ord de slutsatser du kan dra av tabellen.
- I tabellen finns angivet x-koordinaterna för skärningspunkterna mellan kurvan $y = x^2$ och linjen $y = 2x + 1{,}25$. Dessa x-koordinater blir då också lösningen till andragradsekvationen $x^2 = 2x + 1{,}25$
  Lös andragradsekvationen och visa att koordinaterna är korrekta i detta fall.
- Försök att visa att de slutsatser du drog med hjälp av tabellerna gäller för alla tänk-bara linjer som skär kurvan $y = x^2$

Uppgiften består av fyra olika delar.

1/ Gör motsvarande avläsningar i figurerna, fyll i tabellen.

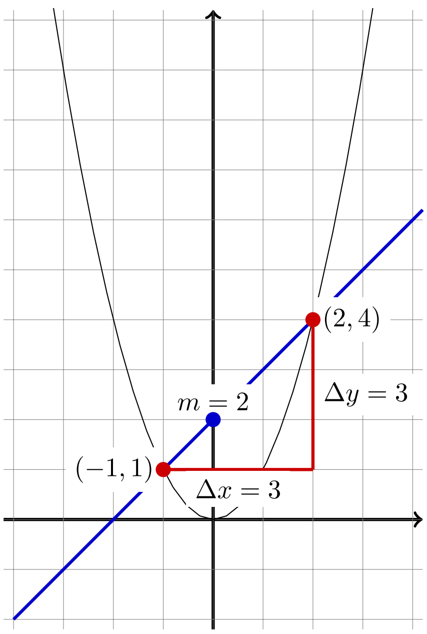
2/ Formulera i ord de slutsatser du kan dra av tabellen.

3/ I tabellen finns angivet x-koordinaterna för skärningspunkterna mellan kurvan $y = x^2$ och linjen $y = 2\,x + 1{,}25$. Dessa x-koordinater blir då också lösningen till andragradsekvationen $x^2 = 2x + 1{,}25$ Lös andragradsekvationen och visa att koordinaterna är korrekta i detta fall.

4/ Försök att visa att de slutsatser du drog med hjälp av tabellerna gäller för alla tänkbara linjer som skär kurvan $y = x^2$.

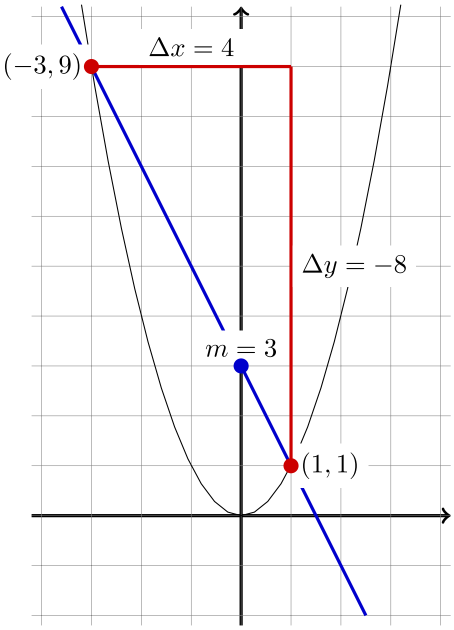
Skärningspunkter mellan en andragradfunktion $y = x^2$ och olika räta linjer ska läsas av och en tabell ska kompletteras. Följande uppgifter ska behandlas:

1/ Komplettera tabellen, finn skärningspunkter



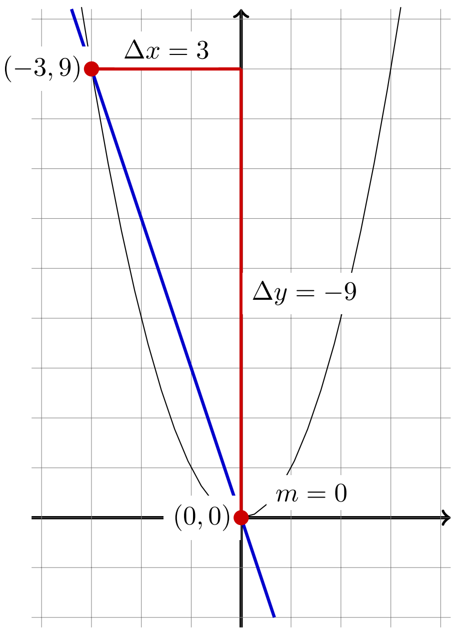
Linje avlästa data		B
x-koordinaten för vänstra skärningspunkten med kurvan	x_1	-1
x-koordinaten för högra skärningspunkten med kurvan	x_2	2
y-koordinaten för skärningspunkten med y-axeln	m	2

Linje beräknade fakta		B
Summan av x-koordinaterna	$x_1 + x_2$	1
Produkten av x-koordinaterna	$x_1 \cdot x_2$	-2
Linjens riktningskoefficient	k	1
Linjens ekvation		$y = x + 2$



Linje avlästa data		C
x-koordinaten för vänstra skärningspunkten med kurvan	x_1	-3
x-koordinaten för högra skärningspunkten med kurvan	x_2	1
y-koordinaten för skärningspunkten med y-axeln	m	3

Linje beräknade fakta		C
Summan av x-koordinaterna	$x_1 + x_2$	-2
Produkten av x-koordinaterna	$x_1 \cdot x_2$	-3
Linjens riktningskoefficient	k	-2
Linjens ekvation		$y = -2\,x{+}3$



Linje avlästa data		D
x-koordinaten för vänstra skärningspunkten med kurvan	x_1	-3
x-koordinaten för högra skärningspunkten med kurvan	x_2	0
y-koordinaten för skärningspunkten med y-axeln	m	0

Linje beräknade fakta		D
Summan av x-koordinaterna	$x_1 + x_2$	-3
Produkten av x-koordinaterna	$x_1 \cdot x_2$	0
Linjens riktningskoefficient	k	-3
Linjens ekvation		$-3\,x$

Fyll i tabellen

		A	B	C	D
x-koordinaten för vänstra skärningspunkten med kurvan	x_1	-0,5	-1	-3	-3
x-koordinaten för högra skärningspunkten med kurvan	x_2	2,5	2	1	0
Summan av x-koordinaterna	$x_1 + x_2$	2	1	-2	-3
Produkten av x-koordinaterna	$x_1 \cdot x_2$	-1,25	-2	-3	0
Linjens riktningskoefficient	k	2	1	-2	-3
y-koordinaten för skärningspunkten med y-axeln	m	1,25	2	3	0
Linjens ekvation		$y = 2x + 1{,}25$	$y = x + 2$	$y = -2\,x{+}3$	$y = -3\,x$

Tabellen avslutar första punkten på listan (sid 37).

2/ Slutsats i ord

- Summan av x-koordinaterna $x_1 + x_2$ är lika med linjens riktningskoefficient k. Detta stämmer för alla fyra fall.
- Produkten av x-koordinaterna $x_1 \cdot x_2$ är lika med y-koordinatens skärning med y-axeln med omvänt tecken. Detta stämmer för alla fyra fall.

Andra punkten i listan med 4 uppgifter är klar (sid 37).

3/ Lös $x^2 = 2\,x + 1{,}25$ och kontrollera

Använd FORMELSAMLINGEN.

Regler	**Andragradsekvationer**
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$x^2 + px + q = 0$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	

Skriv om ekvationen på samma form som i FORMELSAMLINGEN. Vi får då

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 \underbrace{-2}_{p=-2} \cdot x \underbrace{-1{,}25}_{q=-1{,}25} . \\ x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 - (-1{,}25)} = 1 \pm \sqrt{2{,}25)} = 1 \pm 1{,}5 \end{aligned}$$

- Ekvationen har två rötter $x_1 = -0{,}5$ och $x_2 = 2{,}5$ vilket stämmer med fall A i tabellen.

Tredje punkten i listan med uppgifter på sidan 37 är klar.

4/ Visa generell slutsats

En godtycklig linje har formeln

$$y = k \cdot x + m$$

och linjen skär parabeln $y = x^2$ för de x som är lösning till

$$\begin{aligned} x^2 &= k \cdot x + m \\ 0 &= x^2 - k \cdot x - m. \end{aligned} \tag{1}$$

Andragradsekvationen har två rötter x_1 och x_2 vilket betyder att den kan faktoriseras enligt

$$\begin{aligned} 0 &= (x - x_1)(x - x_2) \\ 0 &= x^2 - (\underbrace{x_1 + x_2}_{k})x + \underbrace{x_1 \cdot x_2}_{-m} \end{aligned} \tag{2}$$

Jämför ekvation (1) med (2). Följande slutsatser gäller alltså generellt då linjen var godtycklig.

- Summan av x-koordinaterna $x_1 + x_2$ är lika med linjens riktningskoefficient k.
- Produkten av x-koordinaterna $x_1 \cdot x_2$ är lika med y-koordinatens skärning med y-axeln med omvänt tecken.

Sista punkten i listan med uppgifter på sidan 37 är klar och därmed är hela uppgiften klar.

Kommentar Uppgiften är inte särskilt svår men det är flera olika delfrågor. Alla elever ska kunna komplettera tabellen med x_1 och x_2 för fallen B, C och D. Att lösa andragradsekvationen $x^2 - 2\,x - 1,25 = 0$ ska också alla kunna. Att kunna redovisa välstrukturerat, fullständigt och tydligt kräver vana och träning.