

Kursprov Ma4

Innehåll

Förord	1
Slutord	1
Kursprov Ma4 vt2013	2
Del B: Digitala verktyg är inte tillåtna. Endast svar krävs. #1–6	3
Del C: Digitala verktyg är inte tillåtna. #7–15	5
Del D: Digitala verktyg är tillåtna. #16–23	8
Skolverkets svar	12

Förord

Kursen Ma4 avslutas med ett kursprov som är mycket viktigt för betyget. Det är nödvändigt att veta hur ett kursprov kan se ut när du läser en kurs. Du ska veta vad du ska förbereda dig för. Innan du går till idrottsplatsen ska du veta om du ska tävla i 100 meter löpning eller höjdhopp. Nu gäller det matematik och kursen Ma4. Skolverket har endast publicerat ett kursprov för Ma4 och det kursprovet¹ finns på följande sidor i denna text.

I denna text finns både Skolverkets uppgifter och svar för det enda publicerade kursprovet, Ma4 vt2013. Tyvärr har Skolverket inte publicerat lösningar till uppgifterna utan endast svar och rättningsnorm² *Fullständiga lösningar till kursprovet, vt 2013, kommer att delas ut i pappersform på lektion*. Kursprover till de äldre kurserna MaD och MaE duger också utmärkt för träning i kursen Ma4.

Slutord

För att klara kursen behöver du

- Tid
- Tålamod
- Gott självförtroende

¹I provet vt 2013 fanns också en muntlig del. Den muntliga delen har utgått och kommer inte att finnas i det kursprov du gör. Vårterminen 2013 omfattade den muntliga delen 7 poäng fördelade enligt (3/1/3).

²De bedömningsexempel som Skolverket publicerat i rättningsnormen är exempel på olika felaktiga elevlösningar. Bedömningsexemplen är inte med i denna text.

Del B	Uppgift 1-6. Endast svar krävs.
Del C	Uppgift 7-15. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	150 minuter för Del B och Del C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 23 E-, 24 C- och 20 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 18 poäng

D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå

C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå

B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå

A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

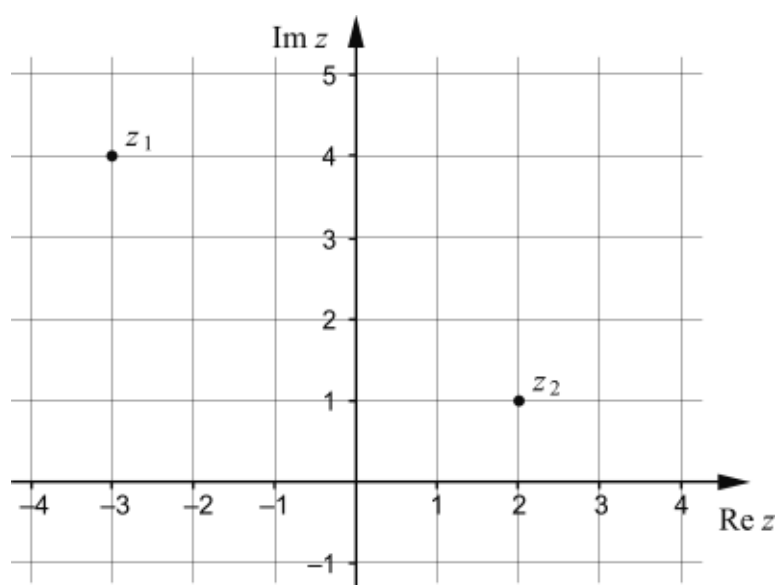
Del B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs.* Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. Derivera

a) $f(x) = \sin 2x$ _____ (1/0/0)

b) $g(x) = (4x + 1)^5$ _____ (1/0/0)

2. Figuren visar ett komplext talplan där talen z_1 och z_2 är markerade.

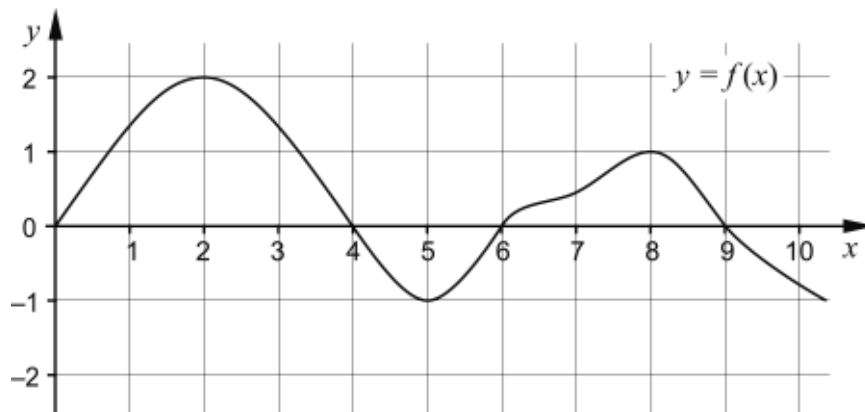


a) Bestäm \bar{z}_2 _____ (1/0/0)

b) Bestäm $z_1 + z_2$ _____ (1/0/0)

3. Ange den lodräta asymptoten till $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ _____ (1/0/0)

4. Figuren visar grafen till funktionen f .



För vilket värde på a i intervallet $0 \leq a \leq 10$ antar

$\int_0^a f(x) dx$ sitt största värde? _____ (0/1/0)

5. För vilka vinklar i intervallet $0^\circ < \nu < 90^\circ$ gäller att $\sin 3\nu < \frac{1}{2}$?

_____ (0/1/1)

6. Ange en kontinuerlig funktion f som är definierad för alla x och har värdemängden $-1 \leq f(x) \leq 7$

_____ (0/0/1)

Del C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

7. Några elever har fått i uppgift att beräkna $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

Agnés får svaret e

Ingela får svaret 0

Kerstin får svaret 1

Har någon av dem räknat rätt? Motivera ditt svar.

(2/0/0)

8. För två komplexa tal z_1 och z_2 gäller att:

- $z_1 \cdot z_2 = 7 + i$
- $z_1 = 3 - i$

Bestäm z_2 på formen $a + bi$

(2/0/0)

9. a) Visa att $\cos^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 \right) = 1$ för alla x där uttrycken är definierade. (2/0/0)

b) Visa att $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$ (0/2/0)

10. Lös ekvationen $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1/1/0)

11. För funktionen f gäller att $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$
- a) Ange asymptoterna till funktionen f *Endast svar krävs* (1/1/0)
- b) Skissa grafen till funktionen f och dess asymptoter. (0/2/0)
- c) Lös olikheten $|f(x)| > 3$ där $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ (0/0/2)
12. Ekvationen $z^p = i$ ska undersökas för olika värden på heltalet p .
För vissa värden på heltalet p är $z_1 = \cos 9^\circ + i \sin 9^\circ$ en lösning till ekvationen $z^p = i$
- a) Visa att detta gäller för $p = 50$, det vill säga visa att z_1 är en lösning till $z^{50} = i$ (0/2/0)
- b) Bestäm alla heltalsvärden på p för vilka z_1 är en lösning till ekvationen $z^p = i$ (0/0/2)
13. För polynomet p gäller att $p(z) = z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8$
- a) Visa att $(z^2 + 4)$ är en faktor i polynomet p . (0/2/0)
- b) Lös ekvationen $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = 0$ (0/1/2)
14. Beräkna $\int_0^{\pi/6} (2 \sin x + 5) \cos x \, dx$ (0/0/2)

15. Lasse och Niklas ska lösa följande uppgift:

Undersök om funktionen $f(x) = \frac{1}{2x-5}$ antar något största värde då $x \geq 0$

Lasse löser uppgiften så här:

$$f(x) = \frac{1}{2x-5}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{(2x-5)^2} < 0 \text{ för alla } x.$$

Då är f avtagande och har sitt största värde i den vänstra ändpunkten, d.v.s. för $x=0$.

$$f(0) = -\frac{1}{5}$$

Svar: Det största värdet är $-\frac{1}{5}$

Niklas säger att Lasses svar är fel eftersom funktionen kan anta större värden än $-\frac{1}{5}$. Till exempel antar funktionen värdet 1 då $x=3$

Utred vilket fel Lasse gör i sin lösning och lös den givna uppgiften.

(0/0/3)

Del D	Uppgift 16-23. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 23 E-, 24 C- och 20 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 18 poäng

D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå

C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå

B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå

A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

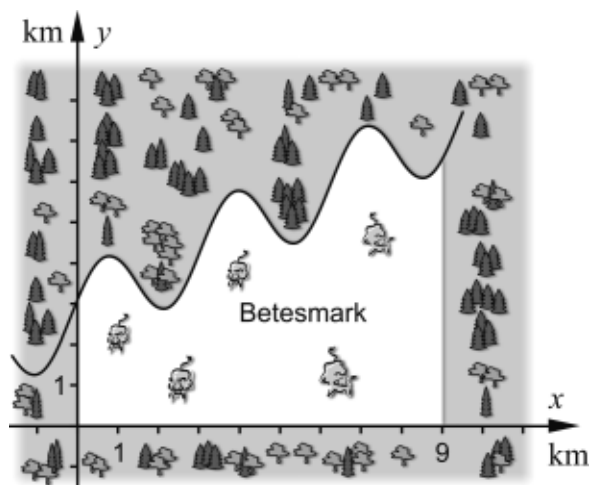
Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

Del D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

16. Skriv det komplexa talet $z = 2 + 2i$ på polär form. (2/0/0)

17. En betesmark för kor avgränsas av skog och en ringlande bäck enligt figuren nedan.



Enligt en förenklad modell kan bäckens läge beskrivas med funktionen

$$f(x) = 0,5x + \sin 2x + 3$$

Beräkna betesmarkens area.

(2/0/0)

18. Ekvationen $\frac{x}{5} + \cos 2x = 2$ har flera lösningar.

Samtliga lösningar ligger i intervallet $-20 \leq x \leq 20$

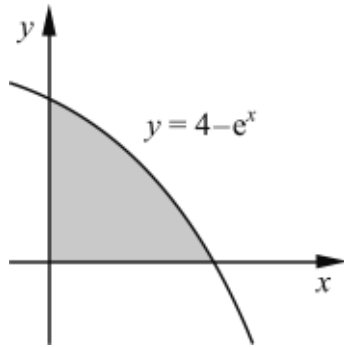
a) Bestäm den minsta lösningen till ekvationen.
Svara med minst tre värdesiffror.

(1/0/0)

b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen.

(1/0/0)

19. I figuren nedan visas det område som begränsas av kurvan $y = 4 - e^x$ och koordinataxlarna.



När området roteras runt x -axeln bildas en rotationskropp. Teckna ett uttryck för rotationskroppens volym och bestäm dess värde med minst tre värdesiffror.

(0/3/0)

20. En fågelunge faller från en 8,0 m hög klippa. För att förenklat beskriva fallrörelsen kan följande differentialekvation ställas upp:

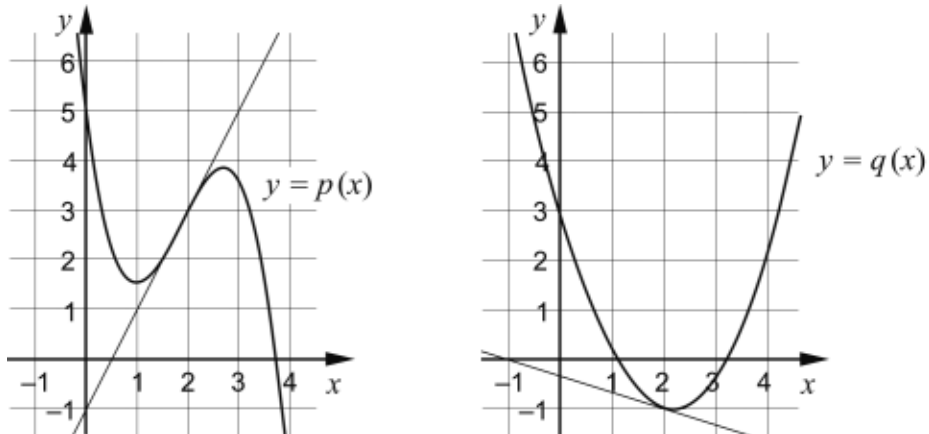
$$\frac{dv}{dt} + 5v = 10 \quad \text{där } v \text{ är fallhastigheten i m/s efter tiden } t \text{ sekunder.}$$

- a) Visa att $v(t) = 2 - 2 \cdot e^{-5t}$ är en lösning till differentialekvationen. (1/0/0)
- b) Bestäm tiden det tar för fågelungen att falla 8,0 m. (0/3/0)

21. Ett företag har undersökt hur länge kunder som ringer till deras kundservice behöver vänta innan de får svar. De har funnit att väntetiden t minuter har en fördelning som kan beskrivas med täthetsfunktionen $f(t) = \frac{1}{6} e^{-t/6}$, $t \geq 0$

- a) Bestäm sannolikheten att en kund som ringer till företaget behöver vänta högst 10 minuter på svar. (0/2/0)
- b) Företaget vill informera om resultatet av undersökningen genom följande formulering: "Vår kundundersökning visar att 50 % av våra kunder behöver vänta högst x minuter." Bestäm värdet på x . (0/2/0)

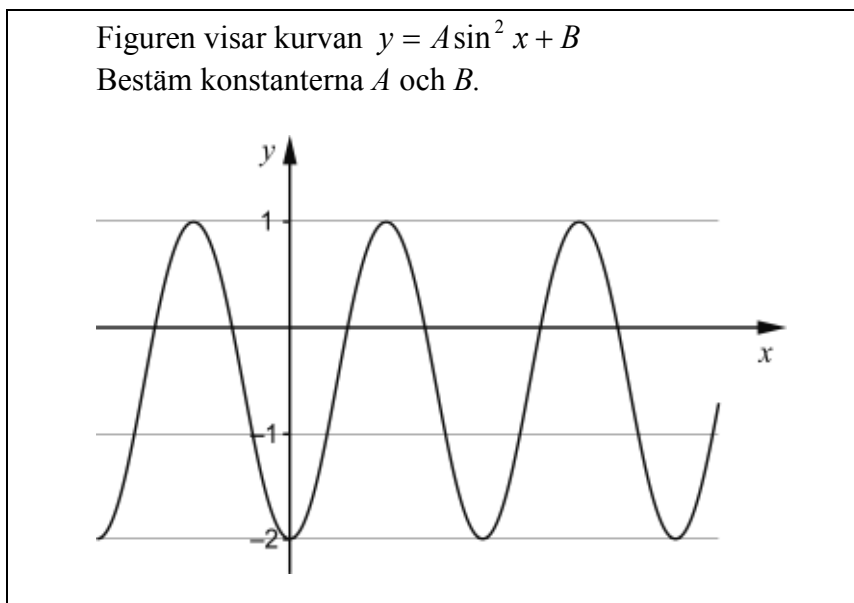
22. Figurerna visar kurvorna $y = p(x)$ och $y = q(x)$ samt tangenterna till dessa för $x = 2$



Låt $r(x) = p(x) \cdot q(x)$ och bestäm $r'(2)$.

(0/0/2)

23. I Lisas matematikbok finns följande uppgift:



Lisa löser uppgiften så här:

$$A = \frac{1 - (-2)}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$B = \frac{1 + (-2)}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5 \quad \text{Svar: } A=1,5 \text{ och } B=-0,5$$

Lisas lösning är inte korrekt. Hjälp Lisa att lösa uppgiften korrekt.

(0/0/2)

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Del B

1. **Max 2/0/0**

a) Korrekt svar ($f'(x) = 2 \cos 2x$) +1 E_P

b) Korrekt svar ($g'(x) = 20(4x + 1)^4$) +1 E_P

2. **Max 2/0/0**

a) Korrekt svar ($2 - i$) +1 E_B

b) Korrekt svar ($-1 + 5i$) +1 E_P

3. **Max 1/0/0**

Korrekt svar ($x = -2$) +1 E_B

4. **Max 0/1/0**

Korrekt svar ($a = 9$) +1 C_B

5. **Max 0/1/1**

Anger minst ett av de korrekta intervallen, t ex $0^\circ < \nu < 10^\circ$ +1 C_B



med korrekt svar ($0^\circ < \nu < 10^\circ$ och $50^\circ < \nu < 90^\circ$) +1 A_B

Kommentar: Även svaren $\nu < 10^\circ$ och $\nu > 50^\circ$ anses godtagbara då intervallet $0^\circ < \nu < 90^\circ$ är givet.

6. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (t ex $f(x) = 3 + 4 \sin x$) +1 A_B

Del C

- 7.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t ex beräknar integralen till $\ln e - \ln 1$ +1 E_P
 med i övrigt godtagbart resonemang (t ex ”Ja, svaret blir 1. Kerstin har rätt.”) +1 E_R
- 8.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t ex anger att $z_2 = \frac{(7+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$ +1 E_{PL}
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z_2 = 2 + i$) +1 E_{PL}
- 9.** **Max 2/2/0**
- a) Godtagbar ansats, t ex förenklar VL till $\sin^2 x + \cos^2 x$ +1 E_R
 med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 E_R
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
- b) Godtagbar ansats, använder additionssatsen korrekt +1 C_R
 med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 C_R
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
- 10.** **Max 1/1/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer minst en lösning till ekvationen +1 E_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = \pm 15^\circ + n \cdot 180^\circ$) +1 C_P

- 11.** **Max 1/3/2**
- a) Anger den vågräta *eller* lodräta asymptoten +1 E_B
med korrekt svar ($x = 3$ och $y = 1$) +1 C_B
- b) Godtagbar skissning av grafen där båda asymptoterna ingår +1 C_P
med korrekt inritade asymptoter och en graf som tydligt närmar sig asymptoterna +1 C_K

Kommentar: Med godtagbar skissning av grafen menas att grafen, med sitt karakteristiska utseende, ligger på rätt sida om asymptoterna men behöver inte vara korrekt inritad punkt för punkt.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



- c) Godtagbar ansats, bestämmer det ena delintervallet, t ex $3 < x < 5$ +1 A_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($2 < x < 3$ eller $3 < x < 5$) +1 A_B

Kommentar: En lösning med svaret $2 < x < 5$ ges ansatspoängen för problemlösning på A-nivå.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



- 12.** **Max 0/2/2**
- a) Godtagbar ansats, använder de Moivres formel korrekt +1 C_P
med i övrigt godtagbar lösning +1 C_P
- b) Godtagbar ansats, bestämmer ytterligare minst ett värde på p med den givna egenskapen +1 A_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($p = 10 + n \cdot 40$) +1 A_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



- 13.** **Max 0/3/2**
- a) Godtagbar ansats, t ex påbörjar en korrekt uppställd polynomdivision +1 C_R
 med i övrigt godtagbart slutfört bevis +1 C_R
- b) Godtagbar ansats, bestämmer minst tre rötter +1 C_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z_1 = -2i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = \sqrt[3]{2}$,
 $z_4 = \sqrt[3]{2}(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ och $z_5 = \sqrt[3]{2}(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$) +1 A_{PL}
- Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, minustecken, rottecken, index, parenteser, termer såsom polär form, koefficient samt hänvisning till de Moivres formel etc. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



- 14.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, bestämmer en korrekt primitiv funktion +1 A_{PL}
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($\frac{11}{4}$) +1 A_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



- 15.** **Max 0/0/3**
- Godtagbar ansats, t ex anger att felet beror på att Lasse inte tar hänsyn till att det finns ett x -värde där funktionen inte är definierad +1 A_R
 med i övrigt godtagbart slutfört resonemang med godtagbar slutsats (t ex ”Nej, den har inget största värde.”) +1 A_R
- Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, $f(x)$, $f'(x)$, parenteser, lim, tydlig skiss, termer såsom nollställe, derivata, största värde, definierad, graf, asymptot, x -axel etc. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



Del D**16.** **Max 2/0/0**Godtagbar ansats, t ex bestämmer $\arg(z)$ +1 E_Bmed i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($2,8(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$) +1 E_B**17.** **Max 2/0/0**Godtagbar ansats, korrekt tecknad integral, $\int_0^9 (0,5x + \sin 2x + 3)dx$ +1 E_Mmed i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (47 km^2) +1 E_M*Kommentar:* Om grader använts i stället för radianer fås det ej godtagbara svaret 49 km^2 .**18.** **Max 2/0/0**a) Godtagbar lösning med godtagbart svar ($x \approx 5,97$) +1 E_Pb) Godtagbar lösning med korrekt svar (7) +1 E_P**19.** **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, bestämmer övre integrationsgränsen eller tecknar

integralen $\pi \int_0^a (4 - e^x)^2 dx$ +1 C_Pmed godtagbar fortsättning, tecknar ett uttryck för volymen, $\pi \int_0^{1,386} (4 - e^x)^2 dx$ +1 C_Pmed i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (17,8) +1 C_P

- 20.** **Max 1/3/0**
- a) Godtagbar lösning +1 E_P
- b) Godtagbar ansats, t ex tecknar en korrekt ekvation för bestämning av tiden,
 t ex $\int_0^x (2 - 2 \cdot e^{-5t}) dt = 8$ +1 C_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (4,2 s) +1 C_M
- Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, VL, HL, $v'(t)$, $v(t)$, integraltecken, parenteser, termer såsom differentialekvation, integral, integrationsgräns, primitiv funktion etc. +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



- 21.** **Max 0/4/0**
- a) Godtagbar ansats, t ex ställer upp en integral för bestämning av sannolikheten att väntetiden är högst 10 minuter +1 C_M
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,81) +1 C_M
- b) Godtagbar ansats, t ex ställer upp en korrekt ekvation för bestämning av x +1 C_{PL}
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($x \approx 4,2$) +1 C_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



- 22.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, t ex anger att $r'(2) = p(2) \cdot q'(2) + p'(2) \cdot q(2)$ +1 A_B
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($r'(2) = -3$) +1 A_{PL}

- 23.** **Max 0/0/2**
- Godtagbar ansats, bestämmer en av konstanterna med godtagbar motivering +1 A_{PL}
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($A = 3, B = -2$) +1 A_{PL}

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

