Innehåll

Förord

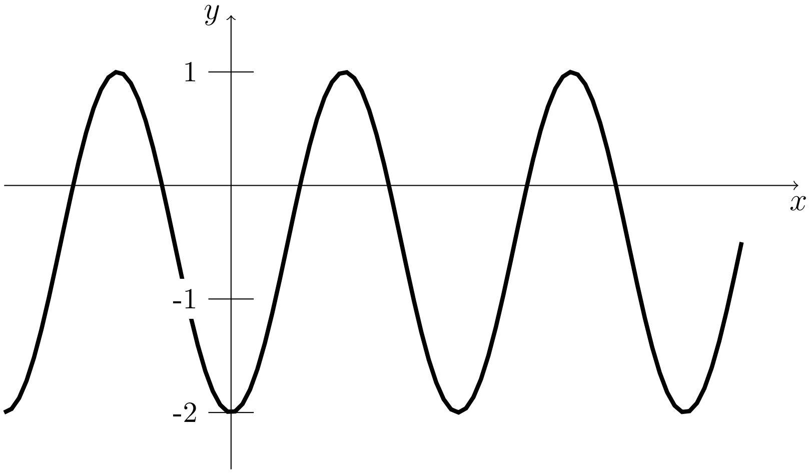
Kom ihåg
- Matematik är att vara tydlig och logisk
- Använd text och inte bara formler
- Rita figur (om det är lämpligt)
- Förklara införda beteckningar

Du ska visa att du kan
- Formulera och utvecklar problem, använda generella metoder/modeller vid problemlösning.
- Analysera och tolka resultat, dra slutsatser samt bedöma rimlighet.
- Genomföra bevis och analysera matematiska resonemang.
- Värdera och jämföra metoder/modeller.
- Redovisa välstrukturerat med korrekt matematiskt språk.

Trigonometri

1 Från graf till funktion

Figuren visar kurvan $y = A\sin^2 x + B$. Bestäm konstanterna A och B.



Uppgiften är, något modifierad, från Skolverkets kursprov Ma4 vt 2013.

1 LÖSNING

Lösning variant I: Studera inverkan av första termen, sätt $B = 0$.

$$y = A \overbrace{\sin^2 x}^{0 \le \sin^2 x \le 1} + \overbrace{B}^{\text{noll}}$$

A är skillnaden mellan högsta och lägsta värde och enligt figuren blir $A = 3$. Funktionens lägsta värde är B och med stöd av figuren blir $B = -2$.

Lösning variant II: För $x = 0$ blir första termen noll och funktionen antar värdet $y(0) = B$ och enligt figuren är $y(0) = -2$. Slutsats $B = -2$. Med $0 \le \sin^2 x \le 1$ och $y(x_{max}) = 1$ får vi $A = 3$.

Svar $A = 3$ och $B = -2$.

2 Rätt formel

En kamrat till dig påstår att $\sin^2 3x = 1 + \cos^2 3x$. Förklara varför din kamrat har fel! Ange därmed det rätta uttrycket.

2 LÖSNING

Med $x = 0$ blir ekvationens vänsterled 0 och högerledet blir 2. Likhet råder alltså inte, ekvationen är fel. I FORMELSAMLINGEN finns rätt ekvation, trigonometriska ettan.

Trigonometriska formler	$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$

Svar Rätt ekvation är $\sin^2 \nu + \cos^2 \nu = 1$ och med $\nu = 3x$ får vi alternativet $\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$.

3 Ekvation

Kurvan $y = \sin 2x$ och linjen $y = 0,5$ har flera skärningspunkter. Ange koordinaten för de två första skärningspunkterna i första kvadranten. (Uppgiften liknar 3439 i boken.)

3 LÖSNING

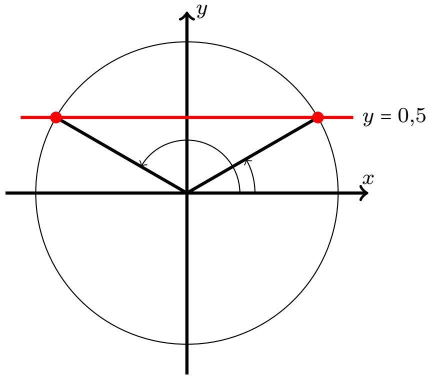
Ekvationen är

$$\sin 2x = 0{,}5.$$

Med inversen till sinusfunktionen kan $2x$ beräknas,

$$2x = \sin^{-1} 0{,}5 + n \cdot 2\pi.$$

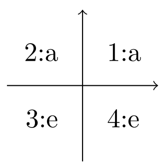
Bestäm $\sin^{-1} 0{,}5$. Rita enhetscirkel och bestäm vinklarna.

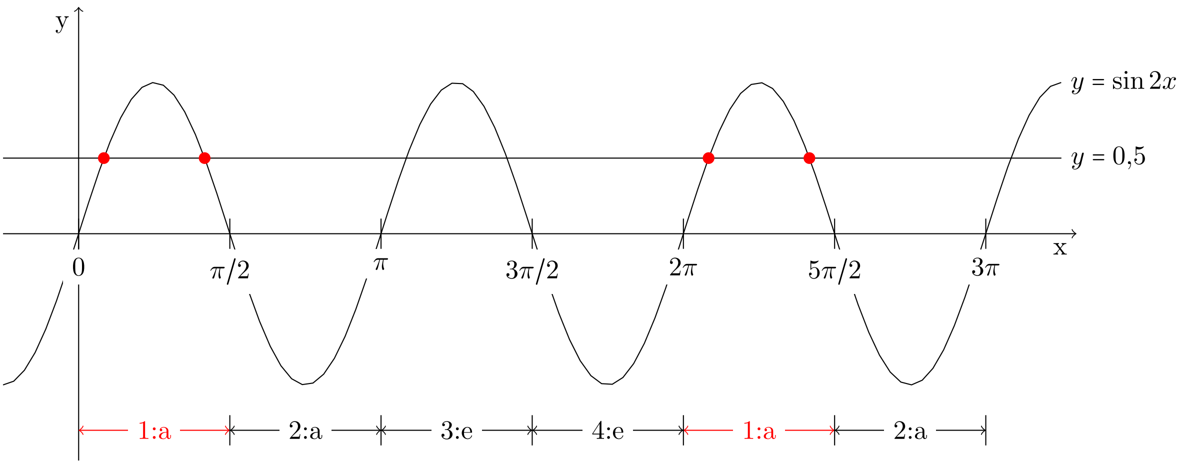


$$2x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \\ \dfrac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{12} + n \cdot \pi \\ \dfrac{5\pi}{12} + n \cdot \pi \end{cases}$$

Kvadranterna är markerade i figuren.





Svar De två första lösningarna i 1:a kvadranten har koordinaterna $(\frac{\pi}{12};\ 0{,}5)$ och $(\frac{5\pi}{12};\ 0{,}5)$.

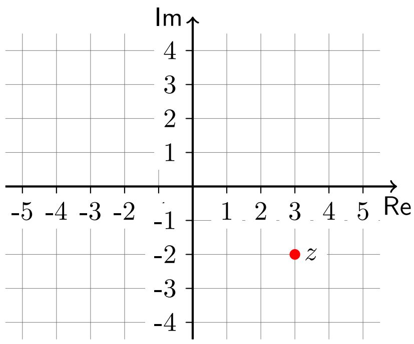
Komplexa tal

4 Komplexa talplanet

Talet z är markerat i det komplexa talplanet.

a) Bestäm $\bar{z}$ och markera det i talplanet.

b) Bestäm $|z|$.

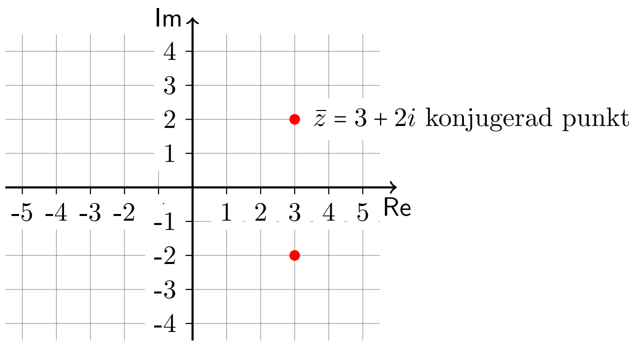


4 LÖSNING

Använd FORMELSAMLINGEN, där finns definitionen av konjugat.

Konjugat	Om $z = x + iy$ så $\bar{z} = x - iy$

Svar a) Se figuren.



b) Använd FORMELSAMLINGEN, där finns definitionen av absolut belopp.

Representation	$z = x + iy = re^{iv} = r(\cos v + i \sin v)$ där $i^2 = -1$
Absolutbelopp	$\lvert z \rvert = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Med $z = 3 - 2i$ blir

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Svar c) $|z| = \sqrt{13}$.

5 $z^n = a$

Lös ekvationen $z^3 = -8i$.

5 LÖSNING

Strategi: Använd polär form för ekvationens höger- och vänsterled. Vi börjar med ekvationens vänsterled. Ansätt

$$z = r\,(\cos\nu + i\,\sin\nu).$$

deMoivres formel ger

$$z^3 = r^3\,(\cos 3\nu + i\,\sin 3\nu)$$

Ekvationens högerled på polär form är

$$-8i = 8\left[\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})\right].$$

Vi får en likhet mellan två komplexa tal på polär form

$$r^3\,(\cos 3\nu + i\,\sin 3\nu) = 8\left[\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})\right].$$

Två komplexa tal på polär form är lika om belopp och argument är lika

$$\begin{aligned} r^3 &= 8 \\ 3\nu &= \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

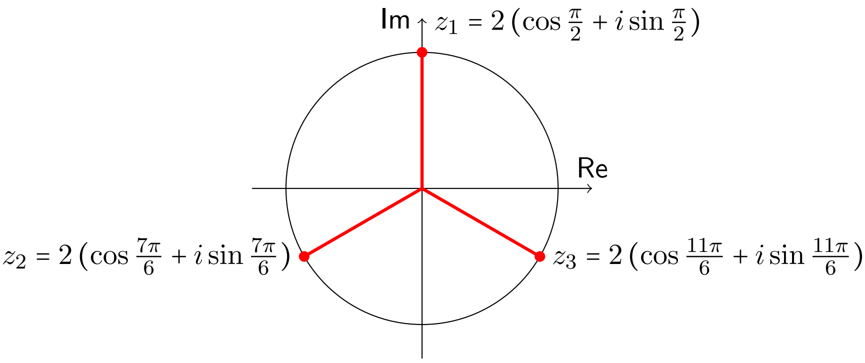
Lösningen är

$$\begin{aligned} r &= 8^{1/3} = 2 \\ \nu &= \frac{\pi}{2} + n\,\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

De tre olika lösningarna är

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{\pi}{2} \\ \nu_2 &= \frac{7\pi}{6} \\ \nu_3 &= \frac{11\pi}{6}. \end{aligned}$$

Svar De tre lösningarna finns i figuren nedan.

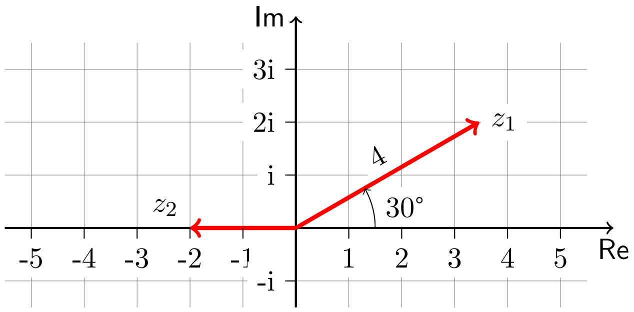


6 Komplexa tal

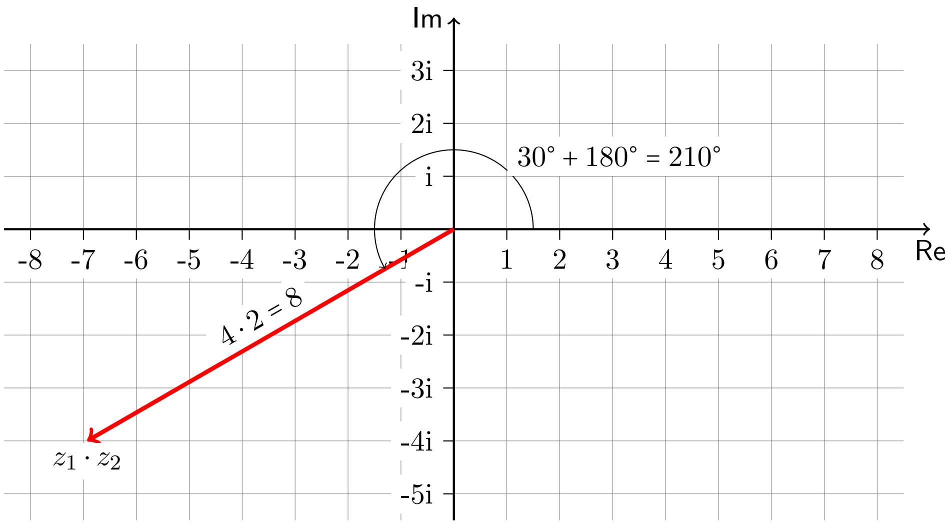
I figuren har man ritat de komplexa talen z_1 och z_2. Bestäm talet $z_1 \cdot z_2$

a) i polär form

b) på formen $a + i\,b$.



6 LÖSNING



7 Ekvation 3:e grad

Visa att ekvationen $z^3 + 3\,z^2 - 9\,z + 5 = 0$ har en rot $z = 1$. Bestäm även övriga rötter till ekvationen.

7 LÖSNING

Använd faktorsatsen[1]

Polynomet $f(x)$ har faktorn $(x - a) \Leftrightarrow x = a$ är en rot till $f(x) = 0$.

och beräkna $p(1)$ för polynomet $p(z) = z^3 + 3\,z^2 - 9\,z + 5$.

$$p(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 5 = 0$$

Eftersom $p(1) = 0$ gäller att $z = 1$ är en rot till polynomet $p(z)$ och då är $(z - 1)$ en faktor i $p(z)$. Faktorisera $p(z)$.

$$\begin{aligned} z^3 + 3\,z^2 - 9\,z + 5 &= (z-1)\,(z^2 + B\,z + C) \\ &= z^3 + (B-1)\,z^2 + (C-B)\,z - C \end{aligned}$$

z^2-term :	3 = B - 1	ger	B=4
z^1-term :	-9 = C - B	ger	C=-5
z^0-term :	5 = - C	ger	stämmer med föregående rad

Vi har nu

$$\begin{aligned} z^3 + 3\,z^2 - 9\,z + 5 &= \underbrace{(z-1)}_{z=1}\underbrace{(z^2 + 4\,z - 5)}_{\text{lös med pq}}. \\ z_{1,2} &= -2 \pm \sqrt{2^2 - (-5)} \\ z_1 &= 1 \\ z_2 &= -5 \end{aligned}$$

□

[1]Symbolen $\Leftrightarrow$ betyder *ekvivalent med* alternativt *om och endast om*.

8 Komplext tal

Ange ett komplext tal z på formen $z = a + bi$ så att:

a) Re $z = 3$.

b) Im $z = 5$.

c) arg $z = 30°$.

8 LÖSNING

Svar a) $z = 3 + i\,5$.

Svar b) $z = 3 + i\,5$.

c) På sidan 4 i FORMELSAMLINGEN finns definitionen av argumentet

Representation	$z = x + \mathrm{i}y = re^{\mathrm{i}v} = r(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$ där $\mathrm{i}^2 = -1$
Argument	$\arg z = v \qquad \tan v = \dfrac{y}{x}$

och på sista sidan i FORMELSAMLINGEN finns exakt värde för $\tan 30°$.

Exakta värden

Vinkel v (grader) (radianer)	$0°$ 0	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$	$120°$ $\frac{2\pi}{3}$	$135°$ $\frac{3\pi}{4}$	$150°$ $\frac{5\pi}{6}$	$180°$ π
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Svar c) $z = \sqrt{3} + i$.

Derivator & integraler

9 Derivera

Derivera
a) $y = 3\sin 2x$
b) $y = t \cdot e^{-2t}$

9 LÖSNING

a) Använd FORMELSAMLINGEN, där finns kedjeregeln

Kedjeregeln	Om $y = f(z)$ och $z = g(x)$ är två deriverbara funktioner så gäller för $y = f(g(x))$ att $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ eller $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

$$\begin{aligned} y &= 3 \cdot \overbrace{\sin(\underbrace{2x}_{\text{inre}})}^{\text{yttre}} \\ y' &= 3 \cdot 2 \cdot \cos 2x = 6\cos 2x \end{aligned}$$

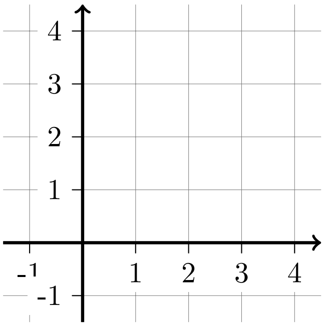
b) Använd poduktregeln som finns i FORMELSAMLINGEN.

Derivator	Funktion	Derivata
	$f(x) \cdot g(x)$	$f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

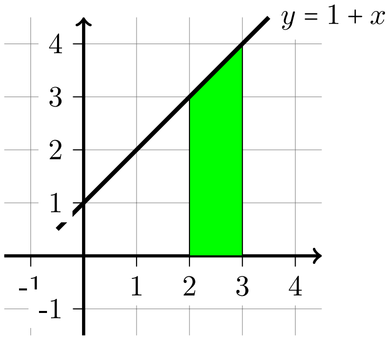
$$\begin{aligned} y &= \underbrace{t}_{f} \cdot \underbrace{e^{-2t}}_{g} \\ y' &= \underbrace{t}_{f} \cdot \underbrace{(-2)\,e^{-2t}}_{g'} + \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^{-2t}}_{g} \end{aligned}$$

10 Integrera

Markera området som beskrivs av integralen $\int_2^3 (x+1)\,\mathrm{d}x$ samt bestäm värdet.



10 LÖSNING



11 Funktion & primitiv funktion

Bestäm $f''(x)$ om $f(x) = (2\,x - 4)^2$ samt beräkna $\int_{-1}^{1} f''(x)\,dx$.

11 LÖSNING

Variant I

Använd FORMELSAMLINGEN där finns

Derivator

Funktion	Derivata
x^n där n är ett reellt tal	nx^{n-1}

och kedjeregeln.

Kedjeregeln

Om $y = f(z)$ och $z = g(x)$ är två deriverbara funktioner så gäller för $y = f(g(x))$ att

$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ eller $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \overbrace{(\underbrace{2x-4}_{\text{innre}})^2}^{\text{yttre}} \\ f'(x) &= 2 \cdot (2x-4) \cdot 2 = 8x - 16 \\ f''(x) &= 8 \end{aligned}$$

Funktionen $f'(x)$ är primitiv till $f''(x)$. Vi får

$$\begin{aligned} \int_{-1} 1 f''(x)\,dx &= [f'(x)]_{-1}^{1} \\ &= [8x-16]_{-1}^{1} \\ &= [8 \cdot 1 - 16] - [8 \cdot (-1) - 16] = 16. \end{aligned}$$

Svar $f''(x) = 8$ och $\int_{-1}^{1} f''(x)\,dx = 16$

Variant II

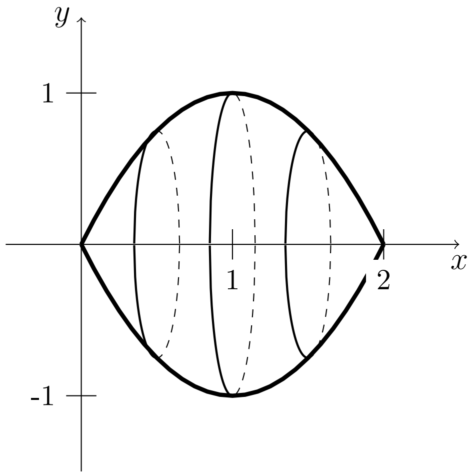
Utveckla högerledet med kvadreringsregeln.

$$\begin{aligned} f(x) &= (\overbrace{2\,x}^{a} - \overbrace{4}^{b})^2 \\ &= \overbrace{4\,x^2}^{a^2} - \overbrace{16\,x}^{-2\,a\,b} + \overbrace{16}^{b^2} \\ f'(x) &= 8\,x - 16 \\ f''(x) &= 8 \end{aligned}$$

Den fortsatta lösningen är som ovan.

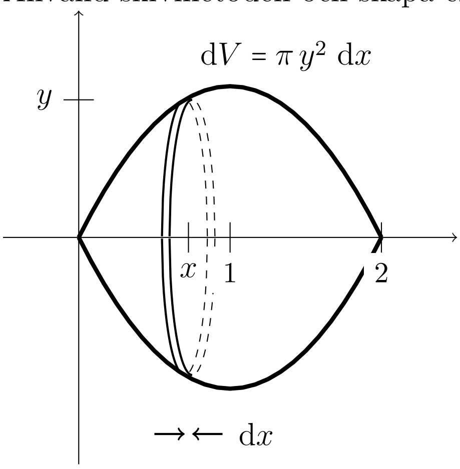
12 Rotationskropp

Beräkna volymen av den rotationskropp som är ritad i figuren. Den kurva som roterar runt x-axeln är $y = 2x - x^2$, och gränserna är $x = 0$ och $x = 2$. Svara både exakt och med ett närmevärde med tre gällande siffror.



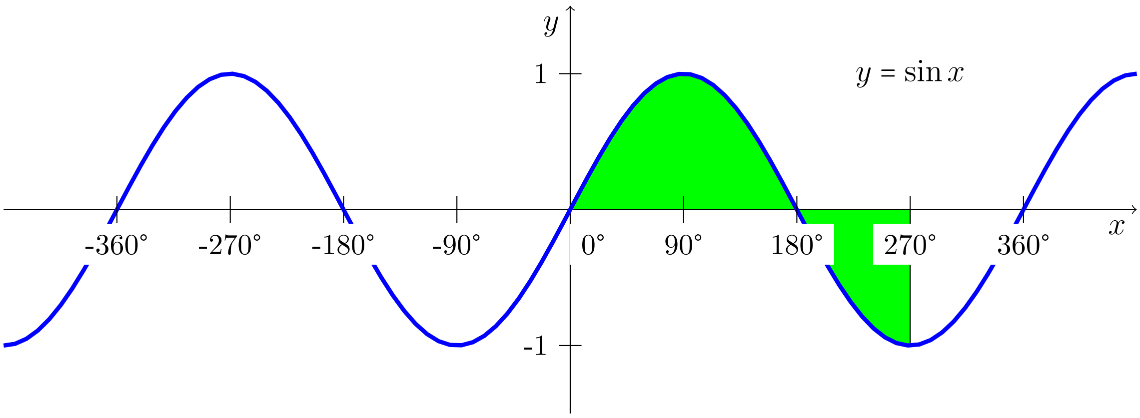
12 LÖSNING

Använd skivmetoden och skapa en skiva enligt figuren.



13 Integral

Bestäm arean av de markerade områdena, $y = \sin x$.



13 LÖSNING

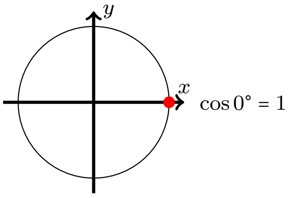
Den sökta integralen måste beräknas i två steg. I intervallet mellan 0° och 180° beräknas ytan mellan sinuskurvan och x-axeln. I intervallet mellan 180° och 270° är x-axeln ovanför sinuskurvan och den övre funktionen är 0 och den undre funktionen är $\sin x$.

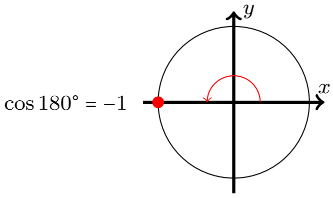
$$\text{Area} = \int_{0^\circ}^{180^\circ} (\underbrace{\sin x}_{\text{övre}} - \underbrace{0}_{\text{undre}})\, dx + \int_{180^\circ}^{270^\circ} (\underbrace{0}_{\text{övre}} - \underbrace{\sin x}_{\text{undre}})\, dx$$

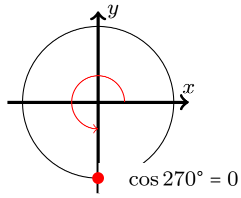
Använd FORMELSAMLINGEN, där finns primitiva funktioner.

Primitiva funktioner	Funktion	Primitiv funktion
	$\sin x$	$-\cos x + C$

$$\text{Area} = \Big[-\cos x\Big]_{0^\circ}^{180^\circ} + \Big[-\cos x\Big]_{180^\circ}^{270^\circ}$$







$$\text{Area} = \Big[-(-1)-(-1)\Big] + \Big[-(-1)-(0)\Big] = 3$$

Svar Arean är 3 areaenheter.

14 Differentialekvation

Visa att $y = 2e^{5x} + 4x$ är en lösning till differentialekvationen $y' - 5\,y = 4 - 20\,x$.

14 LÖSNING

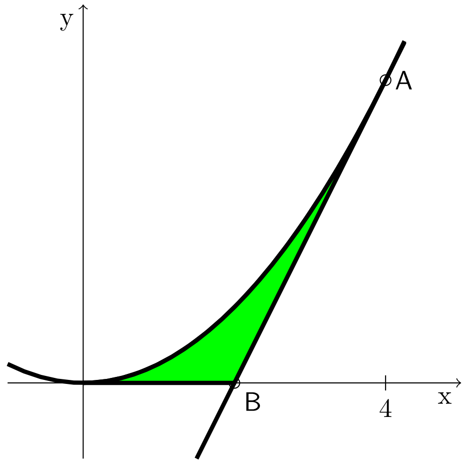
Strategi: Visa att vänsterled (VL) och högerled (HL) är lika, börja med att utveckla vänsterledet.

$$\begin{aligned} y &= 2\,e^{5x} + 4\,x \\ y' &= 5\cdot 2\,e^{5x} + 4 \\ \mathsf{VL} &= 10\,e^{5x} + 4 - 5\,(2\,e^{5x} + 4\,x) \\ \mathsf{VL} &= 4 - 20\,x \end{aligned}$$

Vänsterled och högerled är lika vilket betyder att $y = 2e^{5x} + 4x$ är lösning till differentialekvationen $y' - 5\,y = 4 - 20\,x$.

$\square$

15 Area



Linjen genom punkterna A och B (se figur) är tangent till kurvan $y = \frac{x^2}{4}$. Punkten A har x-koordinaten 4. Beräkna arean av det skuggade området.

15 LÖSNING

Börja med att bestämma ekvationen för linjen genom punkterna A och B. Linjen har ekvation

$$y = k\,x + m$$

Punkten A har koordinaten $(4, 4)$ och i punkten A är lutningen (derivatan)

$$y'(x) = \frac{2\,x}{4}$$

$$y'(4) = \frac{2 \cdot 4}{4} = 2.$$

Återstår att bestämma m i linjens ekvation. Linjen går genom punkten A $= (4, 4)$.

$$\overbrace{y}^{4} = 2\,\overbrace{x}^{4} + \underbrace{m}_{-4}$$

Linjens ekvation är

$$y(x) = 2 \cdot x - 4.$$

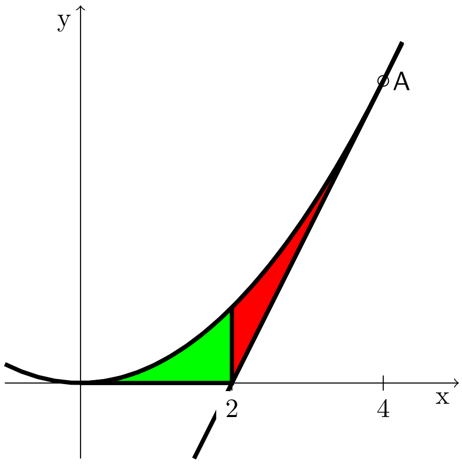
Punkten B har y-koordinaten 0, bestäm x-koordinaten.

$$\overbrace{y(x)}^{0} = 2 \cdot \underbrace{x}_{x=2} - 4$$

som ger

$$\mathsf{B} = (0, 2).$$

Den sökta integralen måste beräknas i två steg. I intervallet mellan 0 och 2 beräknas ytan mellan parabeln och x-axeln. I intervallet mellan 2 och 4 ska ytan mellan den övre parabeln undre linjen beräknas.



$$
\begin{aligned}
\text{Area} &= \int_0^2 [\underbrace{\frac{x^2}{4}}^{\text{övre}} - \overbrace{0}^{x\text{-axel}}]\,dx + \int_2^4 [\overbrace{\frac{x^2}{4}}^{\text{övre}} - \overbrace{(2x-4)}^{\text{undre}}]\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{12} - x^2 + 4x\right]_2^4 \\
&= \left[\frac{2^3}{12} - 0\right] + \left[(\frac{4^3}{12} - 4^2 + 4\cdot 4) - (\frac{2^3}{12} - 2^2 + 4\cdot 2)\right] \\
&= \frac{4^3}{12} + 2^2 - 8 = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

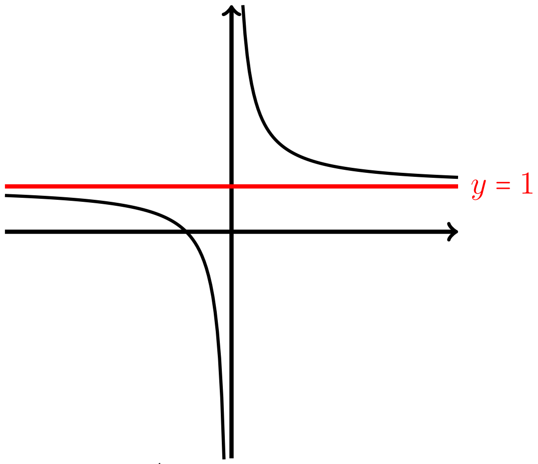
Svar Arean är $\frac{4}{3}$.

16 Horisontell asymptot

Ange en funktion med en horisontell (vågrät) asymptot.

16 LÖSNING

Funktionen $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ har linjen $y = 1$ som horisontell asymptot.



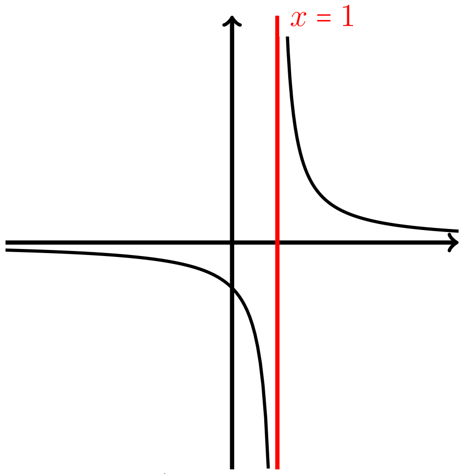
Kommentar Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x}$ har y-axeln som horisontell asymptot.

17 Lodrät asymptot

Ange en funktion med en lodrät (vertikal) asymptot.

17 LÖSNING

Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ har en lodrät asymptot $x = 1$.



Kommentar Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x}$ har x-axeln som lodrät asymptot.