Innehåll

1 Derivera

Bestäm derivatan av följande funktioner:

a.) $f(x) = 2x^3 - x + 2$

b.) $f(x) = x^{3/2}$

c.) $f(x) = e^{-2x}$

1 LÖSNING

Använd FORMELSAMLINGEN där finns

Derivator

Funktion	Derivata
x^n där n är ett reellt tal	nx^{n-1}
a^x $(a > 0)$	$a^x \ln a$
e^x	e^x
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - x + 2 \\ f'(x) &= 2 \cdot 3x^{3-1} - x^{1-1} + 0 \\ f'(x) &= 6x^2 - 1 \end{aligned}$$

Svar a) $f'(x) = 6x^2 - 1$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{3/2} \\ f'(x) &= \frac{3}{2}x^{3/2-1} \\ f'(x) &= \frac{3}{2}x^{1/2} \end{aligned}$$

Svar b) $f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-2x} \\ f'(x) &= -2e^{-2x} \end{aligned}$$

Svar c) $f'(x) = -2e^{-2x}$

2 Polynom

Ange ett polynom med gradtal 3.

2 LÖSNING

Det finns oändligt många svar på denna uppgift, här följer några.

3:e gradspolynom

$p(x) = x^3$	enklat möjliga,	polynomet heter p
$f(x) = x^3$		polynomet heter f
$p(z) = z^3$		variabel z
$p(x) = a_3\,x^3 + 5\,x^2 + 7\,x + 9$	$a_3 \neq 0$	
$p(x) = a_0\,x^3 + a_1\,x^2 + a_2\,x + a_3$	$a_0 \neq 0$	
$p(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$	$a_3 \neq 0$	

Tecknet $\neq$ betyder *icke lika med.*

Icke 3:e gradspolynom

$p(x) = x^4 + x^3$	fjärdegradspolynom
$p(x) = x^3 + x^{1,5}$	endast heltalsexponenter
$p(x) = x^3 + x^{-1}$	endast positiva exponenter

3 Ekvation

Lös ekvationen $(2x-4)(5+x)=0$

3 LÖSNING

Ekvationen består av två faktorer $(2x-4)$ och $(5+x)$ och är nästan sin egen lösning. För att produkten ska bli noll måste någon de två faktorerna vara noll. Det finns två möjligheter. Faktorn $(2x-4)$ blir noll då $x=2$ och faktorn $(5+x)$ blir noll då $x=-5$.

$$0 = (\underbrace{2x-4}_{x=2})(\underbrace{5+x}_{x=-5})$$

Svar Ekvationen har två lösningar, $x=2$ respektive $x=-5$.

4 Exponentialekvation

Lös ekvationen $e^x = 15$ exakt.

4 LÖSNING

Ekvationen är en *exponentialekvation* eftersom den sökta variabeln x är exponent. Exponentialekvationer löses med hjälp av logaritmer.

Använd FORMELSAMLINGEN

Logaritmer	$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$	$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$	
	$\lg x + \lg y = \lg xy$	$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$	$\lg x^p = p \cdot \lg x$

Denna ekvation är ovanligt enkel. Enligt FORMELSAMLINGEN är lösningen $x = \ln 15$.

Svar $x = \ln 15$.

5 Primtiv funktion

Hur många primitiva funktioner har $f(x) = 3x - 2$? Ange tre olika av dessa.

5 LÖSNING

Använd FORMELSAMLINGEN

Primitiva funktioner	Funktion	Primitiv funktion
	k	$kx + C$
	$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Givet funktionen

$$f(x) = 3x - 2.$$

Bestäm primitiv funktion. Den allmänna lösningen är

$$F(x) = 3\frac{x^2}{2} - 2x + C.$$

Det finns naturligtvis många olika lösningar. Tre av dessa är

$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$

$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 2$

$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - 3$

Svar Det finns oändligt många primitiva funktioner. Tre av dessa finns ovan.

6 Förenkla

Förenkla så långt som möjligt $\dfrac{6\,x-2}{3\,x-1}$.

6 LÖSNING

I täljaren $(6\,x-2)$ finns 2 som gemensam faktor. Faktorisera ut 2 och förkorta sedan.

$$\frac{6\,x-2}{3\,x-1}=\frac{2\,(3\,x-1)}{3\,x-1}=2$$

Svar 2.

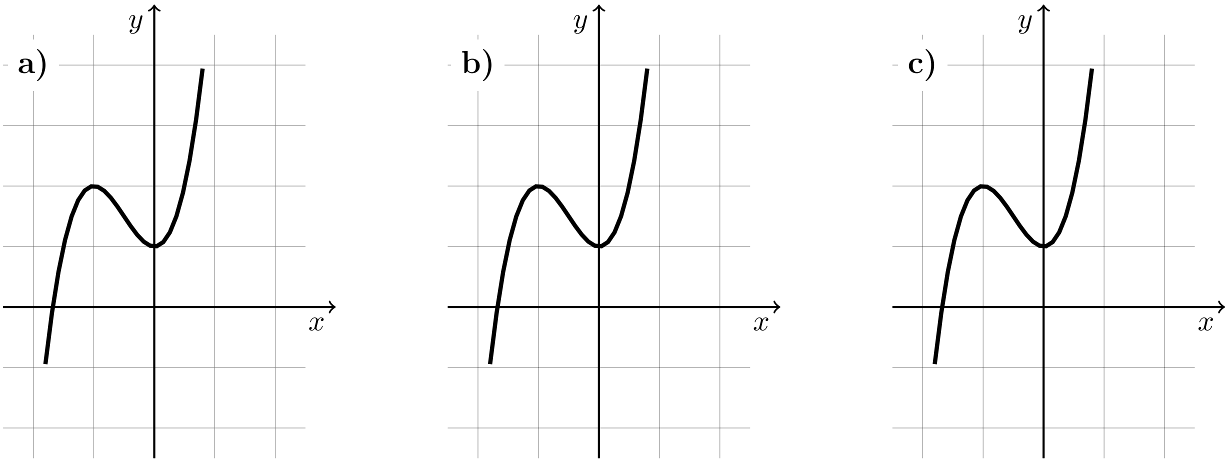
7 Grafer och derivator

Markera följande på graferna nedan:

a) Markera en punkt på grafen där funktionen är noll.

b) Markera de punkter på grafen där derivatan är noll.

c) Markera en punkt där grafens derivata är negativ.

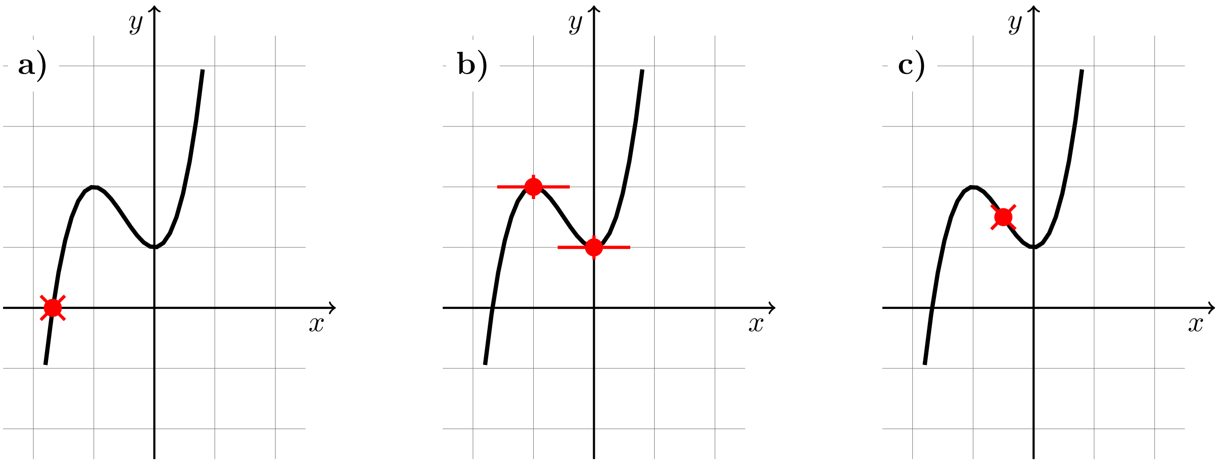


7 LÖSNING

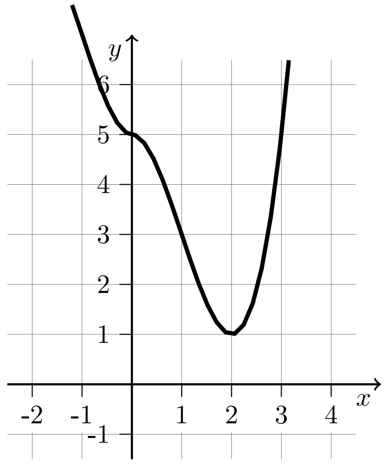
a) Det finns endast en punkt där $f(x) = 0$ Punkten är ungefär $(-1{,}7;\ 0)$

b) Det finns två punkter där $f'(x) = 0$ Punkterna är $(-1;\ 2)$ och $(0;\ 1)$

c) Det finns många punkter där $f'(x) < 0$ En sådan punkt är markerad



8 Graf och derivator



Figuren visar grafen till $y = f(x)$.
Bestäm med hjälp av figuren

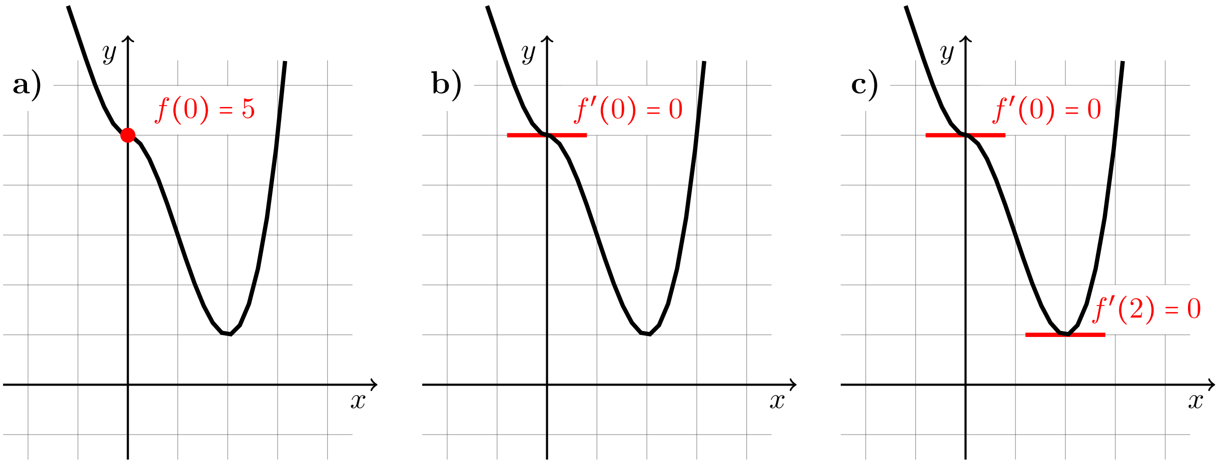
a) $f(0)$
b) $f'(0)$
c) $f'(x) = 0$

8 LÖSNING

a) $f(0) = 5$ se figur

b) $f'(0) = 0$ se figur

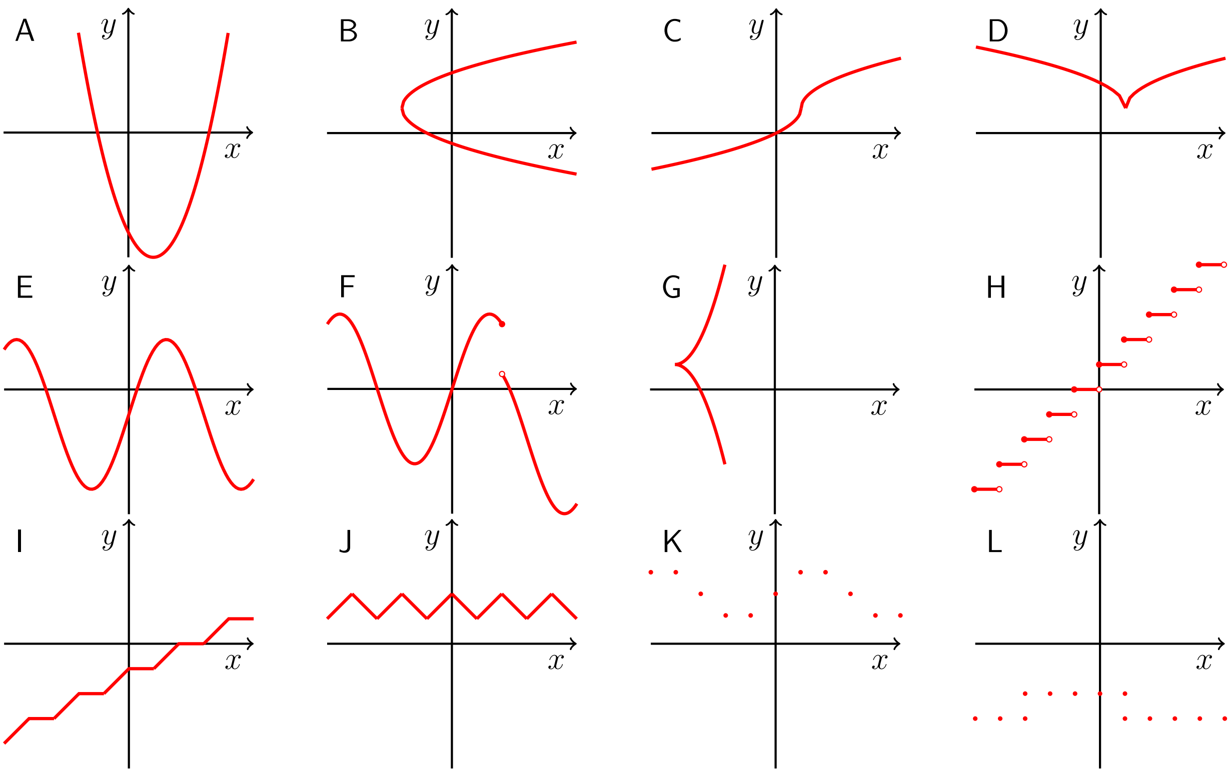
c) $f'(x) = 0$ för $x = 0$ och $x = 2$ se figur



9 Funktioner?

Motivera för var och en av graferna nedan vad som är

- funktion
- kontinuerlig funktion
- diskret funktion.



9 LÖSNING

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
funktion	ja	—	ja	ja	ja	ja	—	ja	ja	ja	ja	—
funktion kontinuerlig	ja	—	ja	ja	ja	—	—	—	ja	ja	—	—
funktion diskret	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	ja	—

funktion	till varje x hör ett och endast ett y (notera att många olika x kan peka på samma y för t.ex. en konstant funktion pekar alla x på samma y)
funktion kontinuerlig	"grafen kan ritas utan att lyfta pennan" (en strikt matematisk definition nyttjar limesbegreppet och och ingår inte i Ma3-kursen)
funktion diskret	funktionen värdemängd består av heltal
icke funktion	det finns x som pekar på mer än ett y

10 Derivera och beräkna

Lös nedanstående:

a) Derivera $f(x) = 3x^4 - 4x + 3$.

b) Beräkna $f'(2)$.

10 LÖSNING

Använd FORMELSAMLINGEN

Derivator	Funktion	Derivata
	x^n där n är ett reellt tal	nx^{n-1}

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\,x^4 - 4\,x + 3 \\ f'(x) &= 3 \cdot 4\,x^{4-1} - 4 + 0 \end{aligned}$$

Svar a) $f'(x) = 12\,x^3 - 4$

b)

$$\begin{aligned} f'(2) &= 12 \cdot 2^3 - 4 \\ f'(2) &= \underbrace{12 \cdot 8}_{96} - 4 = 92 \end{aligned}$$

Svar b) $f'(2) = 92$

11 Bestäm extrempunkter

För funktionen f gäller att $f(x) = x^3 - 3x^2$

Bestäm samtliga extrempunkter med hjälp av derivata. Du ska alltså bestämma dessa punkter samt avgöra för var och en om den är maximi- eller minimipunkt.

11 LÖSNING

Använd FORMELSAMLINGEN

Derivator	Funktion	Derivata
	x^n där n är ett reellt tal	nx^{n-1}

Derivera $f(x)$

$$f'(x) = 3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1}$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Funktionen har extrempunkter när derivatan är noll.

$$0 = 3x^2 - 6x$$

Faktorisera (och lös ekvationen med nollproduktmetoden)

$$0 = 3\underbrace{x}_{x=0}\underbrace{(x-2)}_{x=2}$$

Det finns två olika metoder för att bestämma extrempunkternas karaktär. Enklast är att använda andraderivatan när den fungerar. Teckentabell är jobbigare, men metoden fungerar alltid.

Lösning med andraderivata

För $x = 0$ gäller:

$$f''(x) = 6x - 6$$
$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6.$$

Slutsats är att funktionen $f(x)$ har ett lokalt maximum för $x = 0$. Extrempunkten är:

$$(0;\ f(0)) = (0;\ 0).$$

För $x = 2$ gäller:

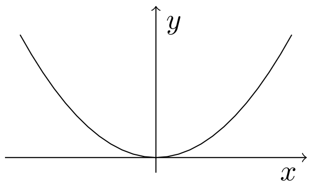
$$f''(2) = 6 \cdot 2 + 6 = 18$$

Slutsats är att funktionen $f(x)$ har ett lokalt minimum för $x = 2$. Extrempunkten är:

$$(2;\ f(2)) = (2;\ -4).$$

Svar Punkten (0; 0) är ett lokalt maximum och (2; -4) ett lokalt minimum.

Kommentar Ett funktionsvärde $f(x_0)$ är ett lokalt minimum när derivatan $f'(x_0) = 0$ och när andraderivatan $f''(x_0) > 0$. Funktionen $f(x) = x^2$ illustrerar detta. Detta är en bra minnesregel.



Lösning med teckentabell
Med

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

blir

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

som kan faktoriseras enligt

$$f'(x) = 3x(x+2).$$

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗
		max		min	

Svar Punkten $(-2,\ 4)$ är ett lokalt maximum och $(0,\ 0)$ är ett lokalt minimum.

12 Bestämd integral

Beräkna den bestämda integralen $\int_0^1 4\,x^3\ \mathrm{d}x$.

12 LÖSNING

Använd FORMELSAMLINGEN

Primitiva funktioner

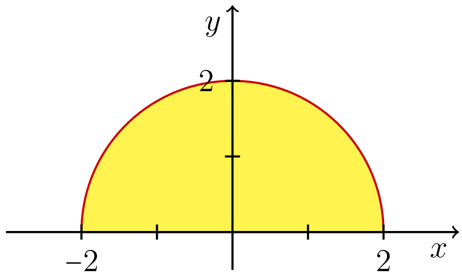
Funktion	Primitiv funktion
k	$kx + C$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$\int_0^1 4\,x^3\ \mathrm{d}x = \left[\frac{4\,x^4}{4}\right]_0^1 = \left[x^4\right]_0^1 = 1^4 - 0^4 = 1$$

Svar Den bestämda integralen är 1.

13 Integral

Figuren visar grafen till funktionen f.
Beräkna $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

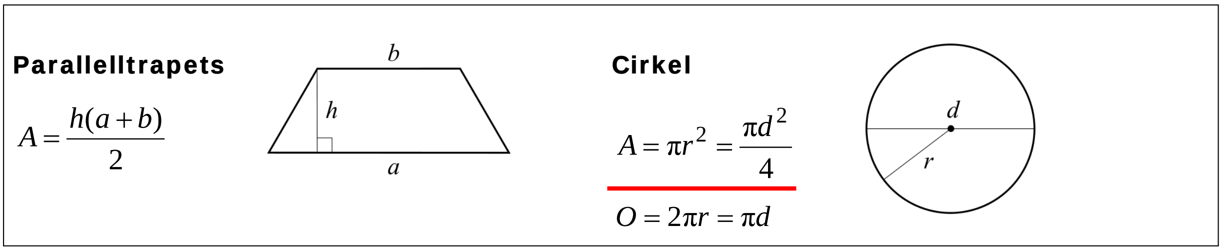


13 LÖSNING

Den geometriska tolkningen av

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

är att det är arean mellan $f(x)$ och x-axeln i intervallet a till b om $f(x) \geq 0$ i hela intervallet. I vårt fall är integralen ytan av en halvcirkel med radien 2.



Arean är halva cirkelns

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 \\ A &= 2 \cdot \pi. \end{aligned}$$

Svar Integralen är 2π.

14 Värdet sjunker, exponentialuttryck

Värdet av en båt minskar enligt formeln $V(t) = 250\,000 \cdot 10^{-0{,}09t}$, där V är värdet i kronor efter t år. Beräkna båtens värde efter åtta år. Svara i hela tusentals kronor.

14 LÖSNING

$$\begin{aligned} V(t) &= 250\,000 \cdot 10^{-0{,}09t} \\ V(8) &= 250\,000 \cdot 10^{-0{,}09 \cdot 8} = 47\,637 \approx 48\,000 \end{aligned}$$

Svar 48 000 kronor

15 Derivata och tangent

Försäljningen av en viss bilmodell fördubblas på sex år. Bestäm den genomsnittliga årliga procentuella ökningen.

15 LÖSNING

Antag att förändringsfaktorn är x. Efter 6 år har försäljningen dubblats. Vi får ekvationen:

$$x^6 = 2$$

som är en potensekvation. Använd FORMELSAMLINGEN, där finns räkneregler för potenser.

Potenser	$a^x a^y = a^{x+y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$(a^x)^y = a^{xy}$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
	$a^x b^x = (ab)^x$	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a^0 = 1$

Potensekvationer löses med rotdragning.

$$x = \sqrt[6]{2} \approx 1{,}122$$

Med den årliga förändringsfaktorn 1,122 blir den årliga ökningen 0,122 som uttryck i procent blir 12,2.

Svar Den årliga ökningen är 12,2 %.

Kommentar Formellt sätt löser vi en allmän potensekvation

$$x^n = a$$

genom att upphöja båda leden till $1/n$. Vi får

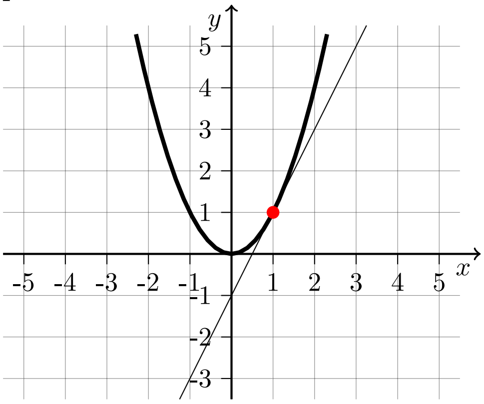
$$(x^n)^{1/n} = a^{1/n}$$
$$x^{n/n} = a^{1/n}$$
$$x = a^{1/n}$$

som alternativt kan skrivas

$$x = \sqrt[n]{a}.$$

16 Bestäm derivata

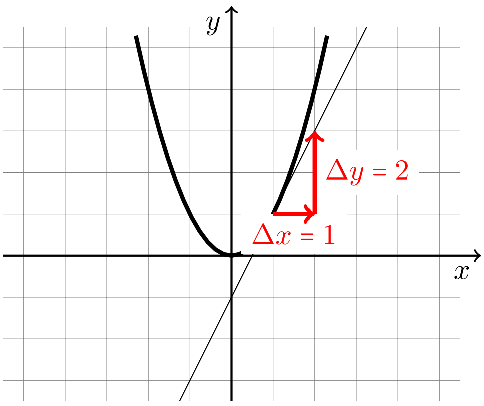
Bestäm, med hjälp av tangenten, derivatan till andragradsfunktionen i den markerade punkten.

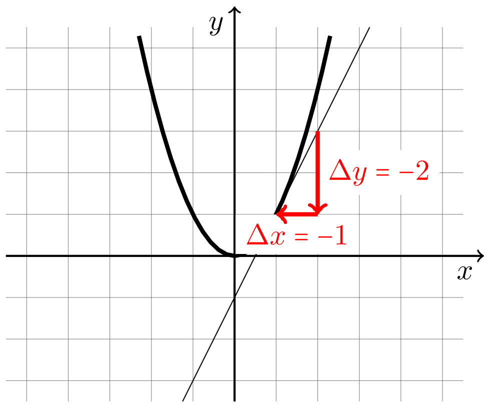


16 LÖSNING

Tangenten är en rät linje. I FORMELSAMLINGEN finns ekvationen för en rät linje.

Räta linjen	**Andragradsfunktioner**
$y = kx + m \qquad k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$y = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$





Välj två punkter på linjen. Det saknar betydelse vilken punkt du namnger som $(x_1;\ y_1)$ respektive $(x_2;\ y_2)$.

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta y &= y_2 - y_1 \\ k &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \end{aligned}$$

Svar $k = 2$

17 Ett problem med limes

Bestäm $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 - 2x^3 - 5x^2}{x^2}$.

17 LÖSNING

Då $x = 0$ är detta ett uttryck av typen $\dfrac{0}{0}$. Att dela med noll är normalt problem i matematiken men här är det ett gränsvärde som ska beräknas. Alla tre termer i täljaren (ovanför bråkstrecket) innehåller faktorn x^2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 2\,x^3 - 5\,x^2}{x^2}$$

Faktorisera ut x^2. Vi får

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(x^2 - 2\,x - 5)}{x^2}.$$

Förkorta. Vi får

$$\lim_{x\to 0}(x^2 - 2\,x - 5) = -5.$$

Svar Gränsvärdet är -5.

18 Maximum/minimum och begränsat intervall

En örn flyger och spanar efter byten. Örnens höjd kan beskrivas med formeln

$$h(t) = \frac{t^3}{9} - 1{,}5\,t^2 + 6\,t + 19 \qquad (0 \le t \le 10),\ \text{där } t\text{=tiden i sekunder.}$$

a) När rör sig örnen uppåt med hastigheten 2,0 m/s?
b) När rör sig örnen nedåt med hastigheten 1,0 m/s?
c) Beräkna örnens maximala höjd.

18 LÖSNING

Hastigheten $v(t)$ (i höjdled) är derivatan av höjden. Använd FORMELSAMLINGEN.

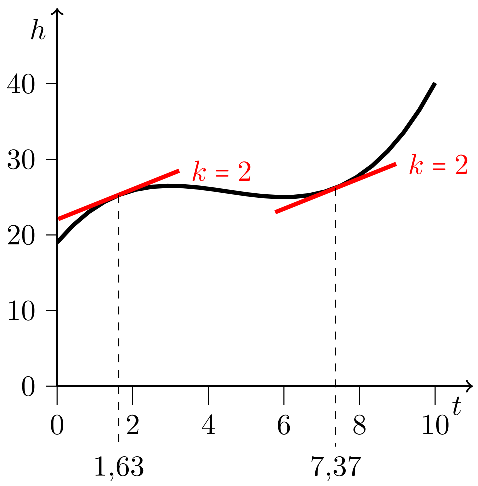
Derivator	Funktion	Derivata
	x^n där n är ett reellt tal	nx^{n-1}

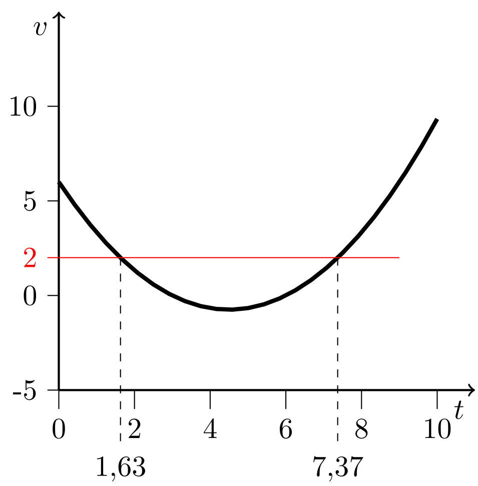
$$v(t) = \frac{3\,t^2}{9} - 1{,}5 \cdot 2\,t + 6$$

Städa.

$$v(t) = \frac{t^2}{3} - 3\,t + 6$$

a) Med grafritande miniräknare är det enkelt att rita graferna för $h(t)$ och $v(t)$.





När rör sig örnen uppåt med hastigheten 2,0 m/s? Lös ekvationen

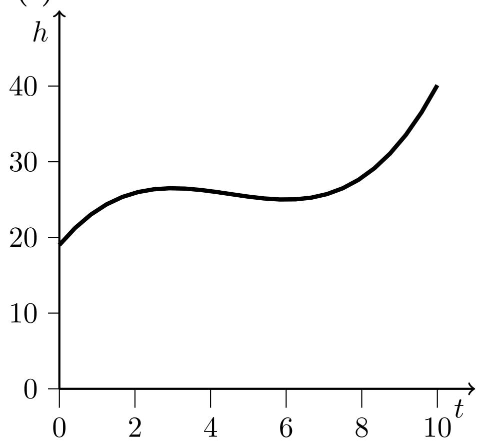
$$\begin{aligned} 2 &= \frac{t^2}{3} - 3\,t + 6 \\ 0 &= \frac{t^2}{3} - 3\,t + 4 \end{aligned}$$

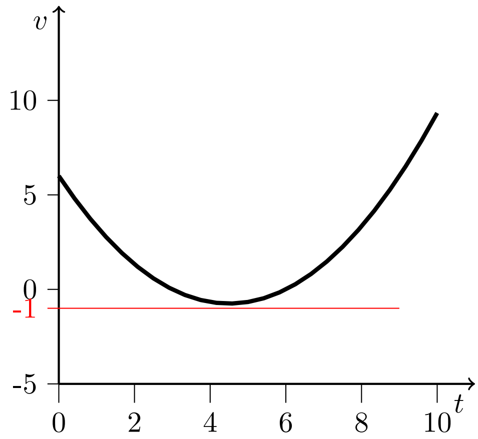
Normalisera ekvationen, alltså fixa till så att koefficienten framför t^2 blir 1 och lös med pq-formeln.

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 \underbrace{-9}_{p} \cdot t + \underbrace{12}_{q} \\ t &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 12} \\ t &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{4 \cdot 12}{4}} \\ t &= \frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2} \\ t &= 4{,}5 \pm 2{,}8723 \\ t_1 &= 7{,}3723 \\ t_2 &= 1{,}6277 \end{aligned}$$

Svar a) Örnen stiger med 2 m/s då $t = 1{,}63$ respektive $7{,}37\,\text{s}$.

b) Med tillgång till grafritande miniräknare är det enkelt att rita graferna för $h(t)$ och $v(t)$.





När rör sig örnen nedåt med hastigheten 1,0 m/s? Lös ekvationen

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{t^2}{3} - 3\,t + 6 \\ 0 &= \frac{t^2}{3} - 3\,t + 7 \end{aligned}$$

Normalisera ekvationen, alltså fixa till så att koefficienten framför t^2 blir 1 och lös med pq-formeln.

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 \underbrace{-9}_{p} \cdot t + \underbrace{21}_{q} \\ t &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 21} \\ t &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{4 \cdot 21}{4}} \\ t &= \frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} \end{aligned}$$

Ekvationen saknar reell lösning.

Svar b) Örnen sjunker aldrig med 1 m/s.

c) Det är en standarduppgift att bestämma max/min för en funktion på ett begränsat intervall. I detta fall är ändpunkterna inkluderade i intervallet, $(0 \leq t \leq 10)$. Det som ska undersökas är lokala max/min i intervallet och de två ändpunkterna.

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{t^3}{9} - 1{,}5\,t^2 + 6\,t + 19 \\ h'(t) &= \frac{t^2}{3} - 3\,t + 6 \\ 0 &= \frac{t^2}{3} - 3\,t + 6 \end{aligned}$$

Normalisera ekvationen, alltså fixa till så att koefficienten framför t^2 blir 1 och lös med pq-formeln.

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 \underbrace{-9}_{p}\ t + \underbrace{18}_{q} \\ t &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 18} \quad = \quad \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{4 \cdot 18}{4}} \quad = \quad \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2} \\ t_1 &= 6 \\ t_2 &= 3 \end{aligned}$$

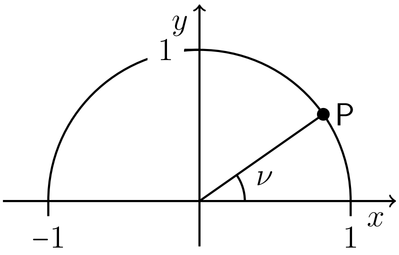
Kandidaterna till högsta höjden är extrempunkterna i intervallet och de två randpunkterna.

x	0	3	6	10
h'	—	0	0	—
h	19	26.5	25	40.11

Svar c) Högsta höjden är 40,1 meter.

19 Enhetscirkel och koordinater

I figuren nedan har man ritat en halv enhetscirkel. Ange med två decimaler koordinaterna för punkten P i figuren om vinkeln $\nu = 35°$.



19 LÖSNING

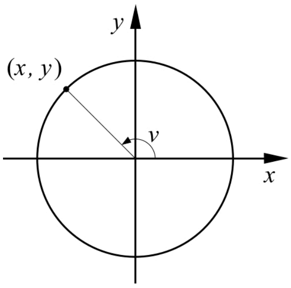
Använd FORMELSAMLINGEN. På sidan 6 finns enhetscirkeln.

Enhetscirkeln

$\sin v = y$

$\cos v = x$

$\tan v = \dfrac{y}{x}$



Nu gäller

$$x = \cos 35°$$
$$y = \sin 35°$$

använd miniräknaren

$$x = \cos 35° = 0{,}8192$$
$$y = \sin 35° = 0{,}5736$$

Svar Koordinaten för P är $(0{,}82;\ 0{,}57)$.

Kurs 3B

20 3B Regelbundet sparande

I januari 2001 satte Karin in 3000 kr på ett sparkonto. Räntan på kontot är 4%. Karin fortsätter sedan att sätta in 3000 kr på kontot i januari varje år.

Vilket av alternativen nedan beskriver hur mycket pengar det kommer att finnas på kontot direkt efter hennes insättning år 2010 om inga uttag sker?

A) $3000 \cdot 1{,}04^9$ B) $3000 \cdot 1{,}04^{10}$ C) $3000 \cdot 1{,}04^{11}$

D) $\dfrac{3000(1{,}04^9 - 1)}{1{,}04 - 1}$ E) $\dfrac{3000(1{,}04^{10} - 1)}{1{,}04 - 1}$ F) $\dfrac{3000(1{,}04^{11} - 1)}{1{,}04 - 1}$

Markera rätt alternativ.

20 LÖSNING

Använd FORMELSAMLINGEN där finns formeln för geometrisk summa.

Geometrisk summa	$a + ak + ak^2 + ... + ak^{n-1} = \dfrac{a(k^n - 1)}{k - 1}$	där $k \neq 1$

Analysera vänsterledet i formeln för geometrisk summa.

$$\underbrace{\overbrace{a}^{0} + \overbrace{ak}^{1} + \overbrace{ak^2}^{2} + \cdots + \overbrace{a^{n-1}}^{n-1}}_{n \text{ stycken termer}} = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1}$$

Vänsterledet har n termer, numrerade från 0 till $n - 1$. Det n som finns i högerledet är antalet termer i den geometriska summan.
Antalet år från 2001 till 2010 är 10. Därmed är $n = 10$ och rätt alternativ är E.

Svar Rätt alternativ är E.

Kommentar 1,04 är förändringsfaktorn som svarar mot 4% ränta och $a = 3\,000$.

21 3B Linjär optimering

Utbildarna AB erbjuder två kurser i Ekonomi. De kan max ha 80 kurser per år med totalt max 1000 deltagare. Intäkterna ges av:

- En grundkurs ger 4000 kr i intäkter och kan ha max 10 deltagare per kurs.
- En fortsättningskurs ger 6000 kr i intäkter och kan ha max 20 deltagare per kurs.

Hur många av varje kurs skall företaget hålla för att maximera sina intäkter under ett år?

21 LÖSNING

Linjära optimeringsproblem löses enkelt med en trestegs standard procedur.

1. Översätt textens krav till ett antal linjära villkor (bivillkor).
   De linjära villkoren beskriver det tillåtna området.
2. Bestäm hörnpunkter i det tillåtna området.
3. Beräkna målfunktionen i hörnpunkterna.

Steg-1 Översätt textens krav till matematiska formler. Inför x som antal grundkurser och y som antal fortsättningskurser. Kravet *kan max ha 80 kurser per år* blir:

$$x + y \leq 80 \tag{1}$$

och kravet *totalt max 1000 deltagare* blir:

$$10 \cdot x + 20 \cdot y \leq 1000. \tag{2}$$

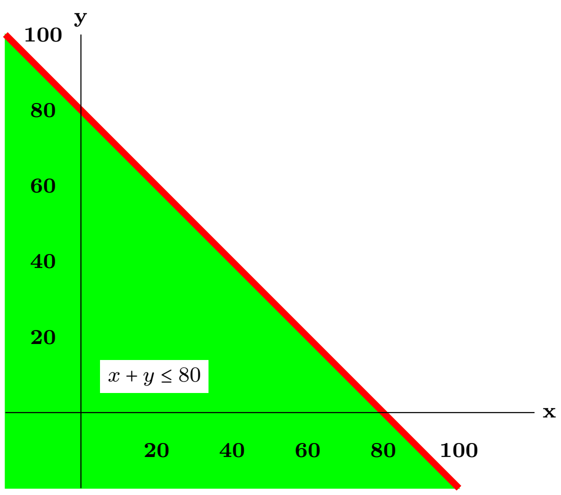
Det finns också logiska krav. Antalet gånger en kurs går måste vara noll eller positivt ger de två kraven

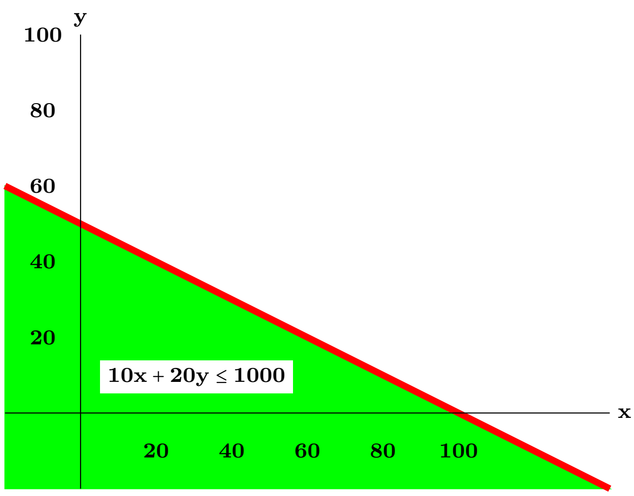
$$0 \leq x \tag{3}$$

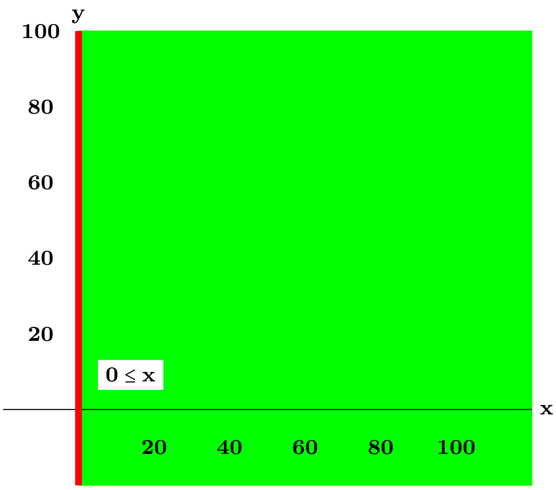
och

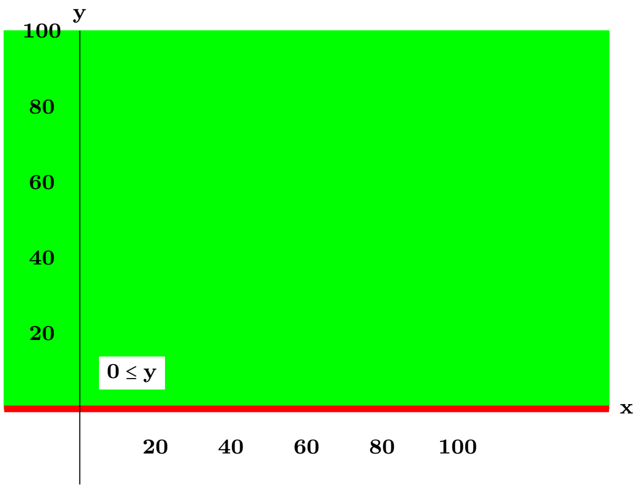
$$0 \leq y. \tag{4}$$

De fyra kraven kan illustreras med följande grafer där grönt markera tillåtet område.

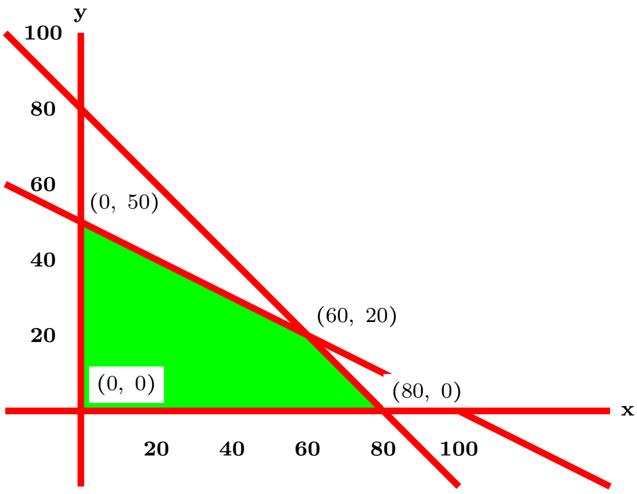








Genom att så till slut ta snittet av dem alla får vi det tillåtna området där vi ska söka lösningen! Vi ser att det tillåtna området är begränsat, det vill säga det omsluts av bivillkorslinjerna.



Steg-2 Bestäm hörnpunkter i det tillåtna området. De fyra bivillkoren har 6 skärningspunkter. Fyra punkter är i det tillåtna området.

bivillkor		skärning mellan		punkt	tillåten
(1)	(2)	$80 = x + y$	$1000 = 10 \cdot x + 20 \cdot y$	(60, 20)	ja
(1)	(3)	$80 = x + y$	$y = 0$	(80, 0)	ja
(1)	(4)	$80 = x + y$	$x = 0$	(0, 80)	nej
(2)	(3)	$1000 = 10 \cdot x + 20 \cdot y$	$y = 0$	(100, 0)	nej
(2)	(4)	$1000 = 10 \cdot x + 20 \cdot y$	$x = 0$	(0, 50)	ja
(3)	(4)	$y = 0$	$x = 0$	(0, 0)	ja

Steg-3 Beräkna målfunktionen i hörnpunkterna. Målfunktionen är

$$\text{vinst} = 4\,000 \cdot x + 6\,000 \cdot y$$

Beräkning av målfunktionen i de fyra hörnpunkterna ger tabellen.

punkt	vinst	
(60, 20)	$4000 \cdot 60 + 6000 \cdot 20 = 360\,000$	$\Leftarrow$ maximal vinst
(80, 0)	$4000 \cdot 80 + 6000 \cdot 0 = 320\,000$	
(0, 50)	$4000 \cdot 0 + 6000 \cdot 50 = 300\,000$	
(0, 0)	$4000 \cdot 0 + 6000 \cdot 0 = 0$	

Svar Företaget ska hålla 60 grundkurser och 20 fortsättningskurser. Maximal vinst blir 360 000 kronor.

Kurs 3C

22 3C Ett litet problem med sinus

Ange ett värde på vinkeln ν om $\sin\nu = 0{,}866$. Avrunda till en decimal.

22 LÖSNING

Givet att

$$\sin\nu = 0{,}866.$$

Bestäm ν. Använd miniräknaren och sinusinversfunktionen.

$$\nu = \sin^{-1} 0{,}866$$
$$\nu = 60^\circ$$

Svar 60°

Kommentar Det finns flera sätt att mäta vinklar. Du ska ha din räknare inställd på grader. Kontrollera genom att beräkna någon trigonometrisk funktion för en känd vinkel. På FORMELSAMLINGens sista sida finns exakta värden för några vinklar.

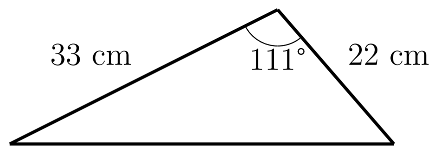
Exakta värden

Vinkel v	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Bra vinklar för kontroll är $\tan 45^\circ = 1$, $\sin 30^\circ = 0{,}5$ och $\cos 60^\circ = 0{,}5$.

23 3C Yta hos triangel

Bestäm arean av triangeln i figuren.



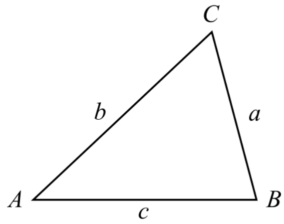
23 LÖSNING

Använd FORMELSAMLINGEN där finns areasatsen.

Sinussatsen $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Areasatsen $T = \frac{ab\sin C}{2}$



Tillämpa areasatsen.

$$T = \frac{33 \cdot 22 \cdot \sin 111^\circ}{2} = 338{,}8896948 \approx 339$$

Svar Arean är 339 cm^2

24 3C Ekvation med absolutbelopp

Lös ekvationen $|x - 1| = 1$.

24 LÖSNING

Använd FORMELSAMLINGEN

Absolutbelopp	$\lvert a \rvert = \begin{cases} a & \text{om } a \geq 0 \\ -a & \text{om } a < 0 \end{cases}$

Det finns två fall. Fallet $x - 1 > 0$ ger

$$\begin{aligned} x - 1 &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

och fallet $x - 1 < 0$ ger

$$\begin{aligned} 1 - x &= 1 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Svar $x = 0$ respektive $x = 2$.

25 3C Ekvation med falsk rot
Lös ekvationen $\sqrt{x+2} = x$.

25 LÖSNING
Ekvationen är

$$\sqrt{x+2} = x. \qquad (1)$$

Kvadrera bägge leden för att få bort kvadratroten

$$x+2 = x^2. \qquad (2)$$

Flytta om och lös med pq-formeln (finns i FORMELSAMLINGEN)

$$0 = x^2 \underbrace{-1}_{p} \cdot x \underbrace{-2}_{q}.$$

Andragradsekvationer	$x^2 + px + q = 0$	$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$x_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 - (-2)} = 0{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} = 0{,}5 \pm 1{,}5$$

$$x_1 = 0{,}5 + 1{,}5 = 2$$

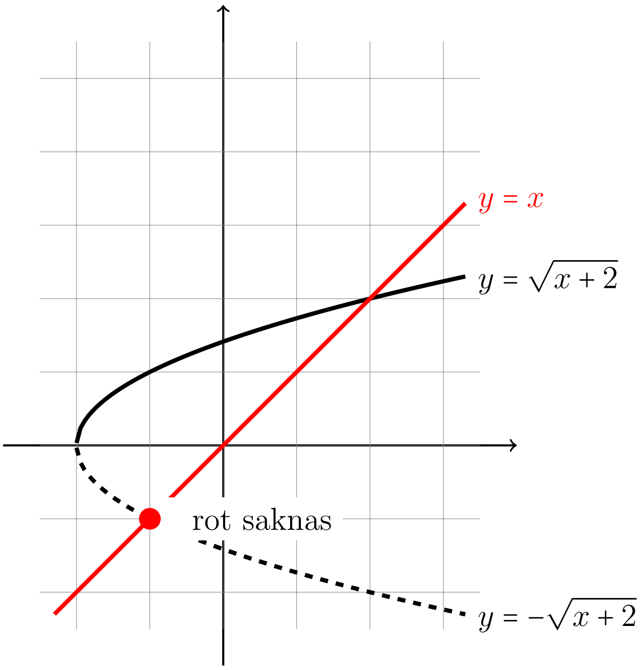
$$x_2 = 0{,}5 - 1{,}5 = -1.$$

Kontrollera rötterna, med $x = 2$ blir vänsterledet i ekvation (1) $\sqrt{4}$ vilket stämmer med högerledet. För lösningen $x = -1$ blir vänsterledet $\sqrt{1}$ och högerledet är -1, därmed är $x = -1$ inte en lösning till ekvation (1).

Svar Ekvationen har lösningen $x = 2$.

Kommentar Tänk på att ekvationen $x^2 = 4$ har två lösningar $x = +2$ repektive $x = -2$ men att $\sqrt{4} = +2$. Se också figurer nedan. Det kvadrerade problemet har en falsk rot.

PROBLEM



KVADRERAT PROBLEM