

## Innehåll

|                     |                                                  |           |
|---------------------|--------------------------------------------------|-----------|
| 1                   | Lös ekvationer exakt . . . . .                   | 2         |
| 2                   | Andragsgradsfunktion och symmetrilinje . . . . . | 4         |
| 3                   | Förenkla uttryck . . . . .                       | 5         |
| 4                   | Rät linje . . . . .                              | 6         |
| 5                   | Andragsgradsfunktion . . . . .                   | 7         |
| 6                   | Rät linje? . . . . .                             | 8         |
| 7                   | Rätta/falska påståenden . . . . .                | 9         |
| 8                   | Grafisk lösning . . . . .                        | 10        |
| 9                   | Beräkna utan räknare . . . . .                   | 11        |
| 10                  | Vinklar i fyrhörning . . . . .                   | 12        |
| 11                  | Bestäm vinklar i triangel . . . . .              | 14        |
| 12                  | Geometriskt problem . . . . .                    | 15        |
| 13                  | Två andragsgradsekvationer . . . . .             | 17        |
| 14                  | Värdeminskning . . . . .                         | 18        |
| 15                  | Modell för vikt och längd . . . . .              | 19        |
| 16                  | Diagonal ... . . . .                             | 20        |
| 17                  | Lös ekvationer . . . . .                         | 21        |
| 18                  | Ekvationssystem . . . . .                        | 22        |
| 19                  | Värdeminskning . . . . .                         | 23        |
| 20                  | Linjära ekvationer . . . . .                     | 24        |
| 21                  | Linjärt ekvationssystem . . . . .                | 25        |
| 22                  | Värdeökning . . . . .                            | 26        |
| <b>Kursen Ma2 C</b> |                                                  | <b>29</b> |
| 23                  | Ma2C Komplexa tal . . . . .                      | 29        |
| 24                  | Ma2C Ekvation . . . . .                          | 30        |
| <b>Statistik</b>    |                                                  | <b>32</b> |
| 25                  | Normalfördelning . . . . .                       | 32        |
| 26                  | Lådagram . . . . .                               | 33        |
| 27                  | Lådagram . . . . .                               | 34        |
| 28                  | Lägesmått och spridningsmått . . . . .           | 35        |
| 29                  | Lådagram . . . . .                               | 36        |
| 30                  | Normalfördelning . . . . .                       | 37        |
| 31                  | Normalfördelning . . . . .                       | 38        |
| 32                  | Blodtryck, linjärt samband . . . . .             | 39        |
| 33                  | Linjärt samband . . . . .                        | 40        |
| 34                  | Korrelation och kausalitet . . . . .             | 42        |
| 35                  | Korrelation och kausalitet . . . . .             | 44        |

## 1 Lös ekvationer exakt

Lös ekvationerna exakt:

- a)  $x^3 = 9$
- b)  $2^x = 12$
- c)  $\lg x = 2$

## 1 LÖSNING

a) Ekvationen är en *potensekvation*. Den sökta variabeln  $x$  finns på raden och är upphöjd till potensen 3. I FORMELSAMLINGEN finns räkneregler för potenser

|                     |                                                |                                                   |                          |
|---------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------|
| $a^x a^y = a^{x+y}$ | $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$                    | <u><math>(a^x)^y = a^{xy}</math></u>              | $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ |
| $a^x b^x = (ab)^x$  | $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ | <u><math>a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}</math></u> | $a^0 = 1$                |

$$\begin{aligned} x^3 &= 9 \\ (x^3)^{1/3} &= 9^{1/3} \\ x &= 9^{1/3} \end{aligned}$$

Svar a)  $x = 9^{1/3}$

b) Ekvation är en *exponentialekvation*. Den sökta variabeln  $x$  finns som exponent till 2. Exponentialekvationer löses genom att logaritmera ekvationen och därefter använda räkneregler för logaritmer. I FORMELSAMLINGEN finns räkneregler för logaritmer.

|                                      |                                   |                                             |  |
|--------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------------|--|
| <b>Logaritmer</b>                    |                                   |                                             |  |
| $y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$ |                                   |                                             |  |
| $\lg x + \lg y = \lg xy$             | $\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$ | <u><math>\lg x^p = p \cdot \lg x</math></u> |  |

Ekvationen är

$$2^x = 12.$$

Den logaritmerade ekvationen blir

$$\lg 2^x = \lg 12$$

och med hjälp räkneregler för logaritmer får vi

$$\begin{aligned}x \cdot \lg 2 &= \lg 12 \\x &= \frac{\lg 12}{\lg 2}.\end{aligned}$$

**Svar b)**  $x = \frac{\lg 12}{\lg 2}$

**c)** Lös ekvationen  
 $\lg x = 2$

I ekvationens vänsterled finns logaritmfunktionen och i FORMELSAMLINGEN finns definitionen av logaritmfunktionen.

**Logaritmer**

$$\underline{y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y}$$

$$\lg x + \lg y = \lg xy \quad \lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y} \quad \lg x^p = p \cdot \lg x$$

Den dubbelriktade pilen  $\Leftrightarrow$  betyder *om och endast om* alternativt *är ekvivalent med*. Symbolen  $\Leftrightarrow$  används både i matematik och filosofi/logik. Vi får:

$$x = 10^2 = 100.$$

**Svar c)**  $x = 100$

## 2 Andragradsfunktion och symmetrilinje

En andragradsfunktion har nollställena  $x = 10$  och  $x = -2$ . Ange funktionens symmetrilinje.

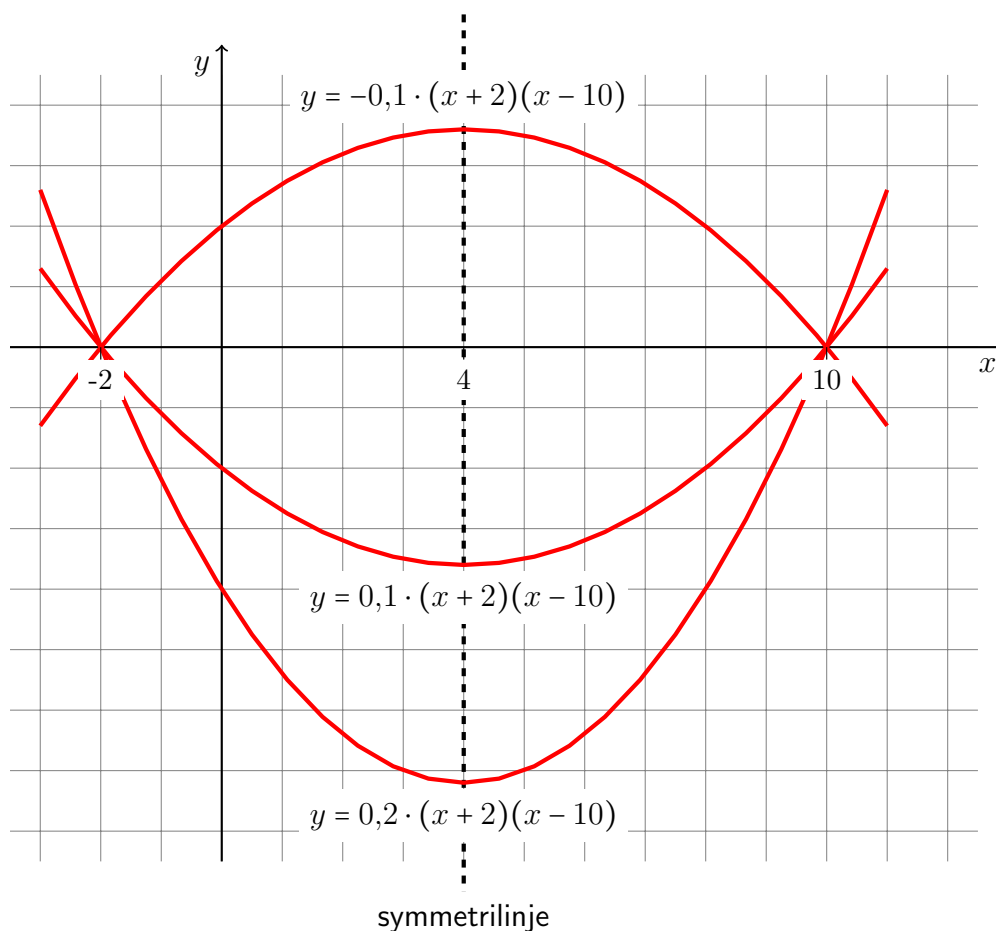
### 2 LÖSNING

Symmetrilinjen ligger mitt emellan de två rötterna (nollställena).

$$\frac{10 + (-2)}{2} = 4$$

**Svar** Symmetrilinjen har ekvationen  $x = 4$

**Kommentar** Det finns många olika ekvationer som har rötterna  $x = 10$  och  $x = -2$ .



### 3 Förenkla uttryck

Förenkla uttrycket  $(x - 4)(x + 1) + 15$  så långt som möjligt.

### 3 LÖSNING

**Variant 1:**

$$\begin{aligned} & (x - 4)(x + 1) + 15 \\ & \underbrace{x \cdot (x + 1)}_{x^2+x} - \underbrace{4 \cdot (x + 1)}_{4x+4} + 15 \\ & (x^2 + x) - (4x + 4) + 15 \\ & x^2 + x - 4x - 4 + 15 \\ & x^2 - 3x + 11 \end{aligned}$$

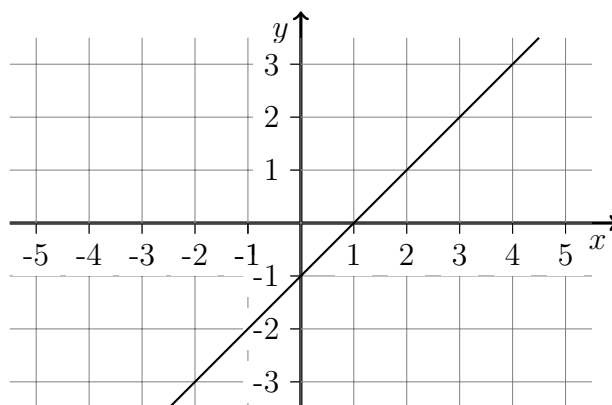
**Variant 2:**

$$\begin{aligned} & (x - 4)(x + 1) + 15 \\ & \underbrace{(x - 4) \cdot x}_{x^2-4x} + \underbrace{(x - 4) \cdot 1}_{x-4} + 15 \\ & x^2 - 4x + x - 4 + 15 \\ & x^2 - 3x + 11 \end{aligned}$$

**Svar**  $x^2 - 3x + 11$

## 4 Rät linje

- a) Bestäm  $k$  och  $m$  för linjen nedan.  
 b) Ange ekvationen för en linje som är parallell med linjen nedan.



## 4 LÖSNING

I FORMELSAMLINGEN finns ekvationen för räta linjen.

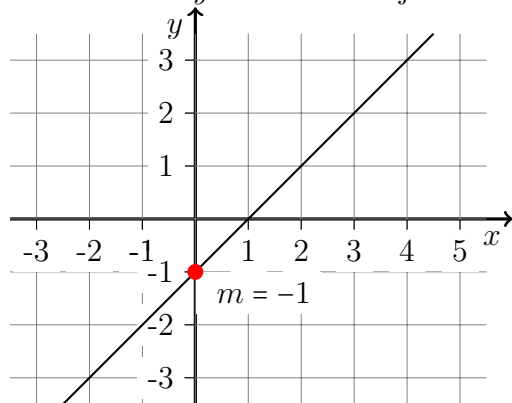
### Räta linjen

$$y = kx + m \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

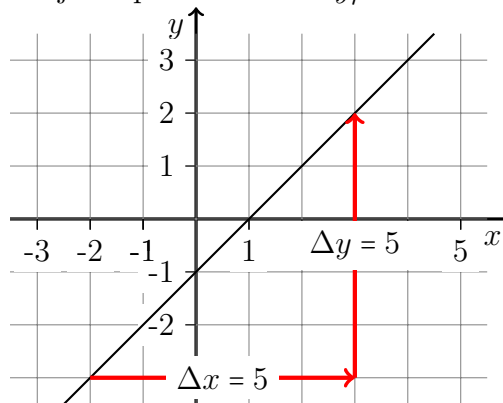
### Andragsgradsfunktioner

$$y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

Då  $x = 0$  blir  $y = m$  i räta linjens ekvation.



Välj två punkter.  $k = \Delta y / \Delta x$



Svar a)  $k = 1$  och  $m = -1$

Svar b) Samma  $k$ -värde ger parallella linjer,  $y = x$ .

## 5 Andragradsfunktion

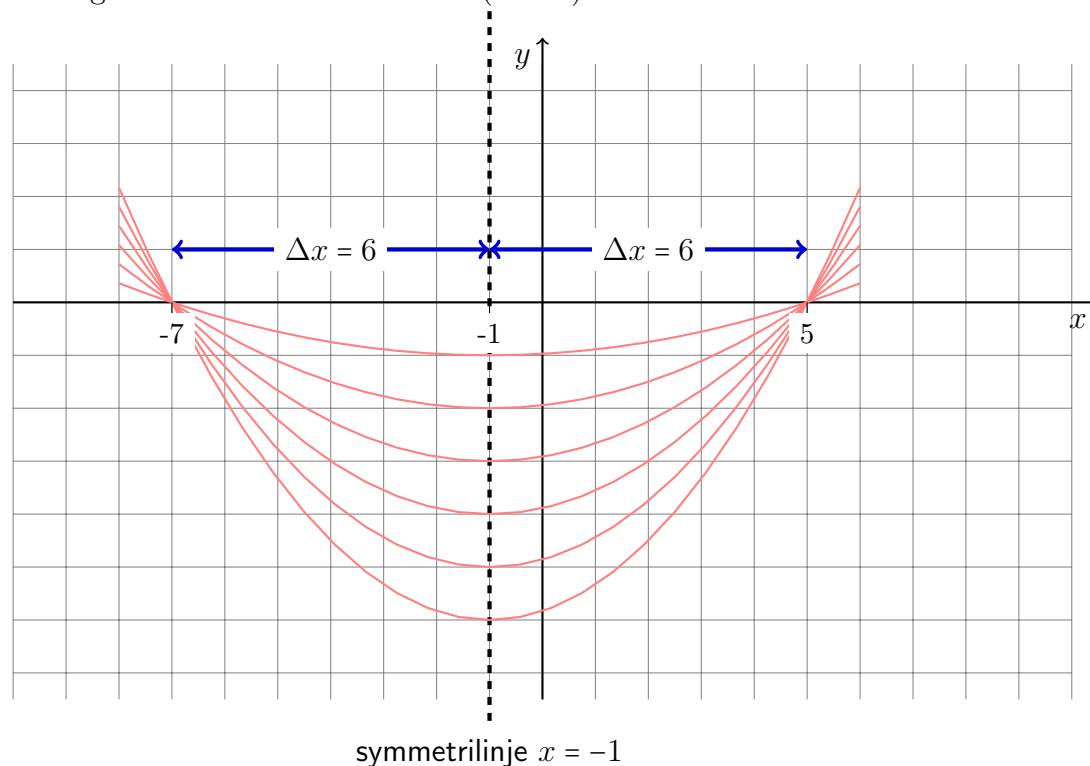
För en andragradsfunktion gäller följande.

- Funktionen har ena nollstället  $x = 5$ .
- Funktionen har sitt minsta värde vid  $x = -1$ .

För vilket värde på  $x$  har funktionen sitt andra nollställe?

## 5 LÖSNING

En andragradsekvation har sitt max/minvärde på symmetrilinjen som ligger mitt emellan andragradsekvationens nollställen (rötter).



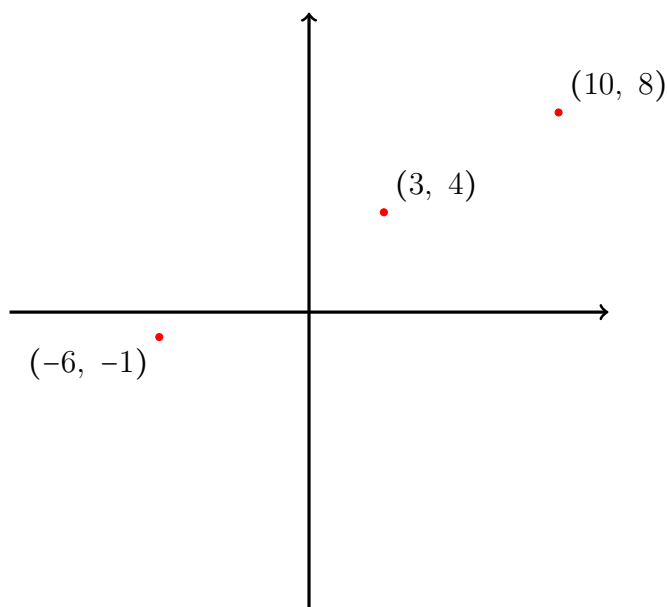
**Svar** Funktionen har sitt andra nollställe för  $x = -7$ .

**Svar**  $x = -7$

## 6 Rät linje?

I ett koordinatsystem finns de tre punkter som markerats i figuren. Wilma anser, att dessa tre punkter ligger på en rät linje. Madeleine menar, att punkterna inte alls ligger på en rät linje utan att det bara ser ut så. Undersök vem som har rätt.

(Nationellt prov, kurs B, vt 2002)



## 6 LÖSNING

Kalla punkterna från vänster till höger för A, B och C.

A (-6, -1)

B (3, 4)

C (10, 8)

Det finns flera olika strategier för att lösa problemet. Om punkterna ligger på en rät linje så ska en linje som går genom A och B ha samma riktningskoefficient som en linje som går genom B och C. Riktningskoefficienten  $k_{AB}$  för en linje genom A och B är

$$k_{AB} = \frac{4 - (-1)}{3 - (-6)} = \frac{5}{9}.$$

Riktningskoefficienten  $k_{BC}$  för en linje genom B och C är

$$k_{BC} = \frac{8 - 4}{10 - 3} = \frac{4}{7}.$$

**Svar** Punkterna ligger inte på en rät linje.



## 7 Rätta/falska påståenden

Ett eller flera av följande påståenden stämmer inte. Vilket eller vilka?

- a)  $y = 3x - 4x^2 + 1$  har en minimipunkt.
- b) Linjen  $x = 5$  är parallell med  $x$ -axeln.
- c) En andragsgradsfunktion med två nollställen har en maximi- eller minimipunkt vars  $x$ -koordinat ligger mitt emellan nollställena.
- d)  $\lg 9 < 1$

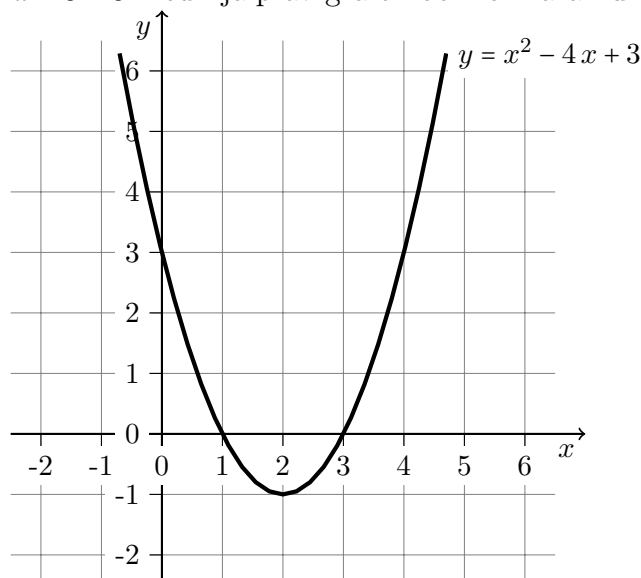
## 7 LÖSNING

- a) FEL Har maximipunkt
- b) FEL Linjen  $x = 5$  är parallell med  $y$ -axeln
- c) KORREKT Symmetrilinjen ligger mitt emellan nollställena (om det finns nollställen).
- d) KORREKT  $\lg 10 = 1$  och  $\lg 9 < 1$

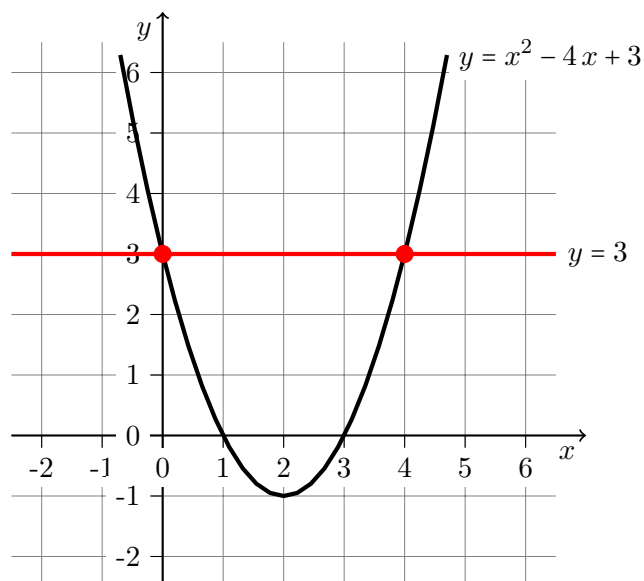
## 8 Grafisk lösning

Nedan finns grafen till funktionen  $y = x^2 - 4x + 3$ .

Lös ekvationen  $x^2 - 4x + 3 = 3$  med hjälp av grafen och förklara hur du gör.



## 8 LÖSNING



Ekvationen är  $\underbrace{x^2 - 4x + 3}_{\text{vänsterled}} = \underbrace{3}_{\text{högerled}}$ .

Lösningarna är skärningspunkterna mellan vänster och högerled.

**Svar** Lösningarna är  $x = 0$  respektive  $x = 4$ . Figuren ovan illustrerar.

## 9 Beräkna utan räknare

Beräkna utan räknare  $\frac{93^2}{93 + 93 + 93}$ .

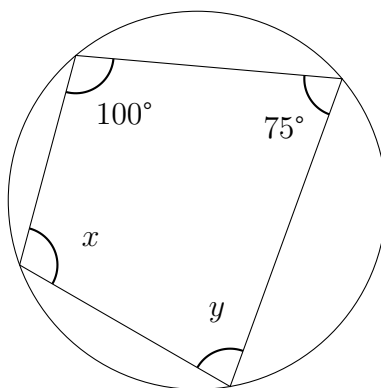
## 9 LÖSNING

$$\frac{93^2}{93 + 93 + 93} = \frac{93 \cdot 93}{3 \cdot 93} = \frac{93}{3} = \frac{3 \cdot 31}{3} = 31$$

**Svar** 31

## 10 Vinklar i fyrhörning

Bestäm vinklarna  $x$  och  $y$  i den inskrivna fyrhörningen.

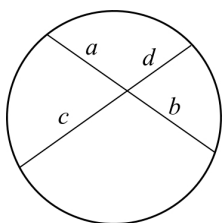


## 10 LÖSNING

Använd randvinkelsatsen den finns i FORMELSAMLINGEN. Enligt randvinkelsatsen är medelpunktvinkeln  $u$  dubbelt så stor som motsvarande randvinkeln  $v$ .

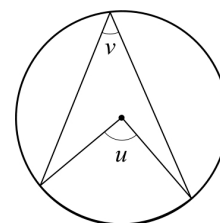
### Kordasatsen

$$ab = cd$$

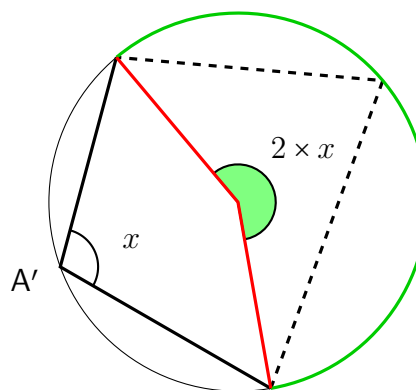
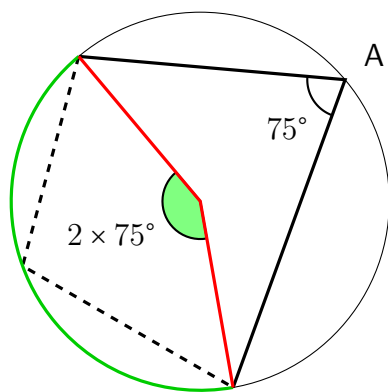


### Randvinkelsatsen

$$u = 2v$$



Använd randvinkelsatsen för randvinkeln vid A. Motsvarande centrumvinkel blir  $2 \times 75^\circ$ .  
Använd randvinkelsatsen för randvinkeln vid A'. Motsvarande centrumvinkel blir  $2 \times x$ .



Summan av de två centrumvinklarna är  $360^\circ$ .

$$2 \times 75^\circ + 2 \times x = 360^\circ$$

$$75^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 75^\circ$$

$$x = 105^\circ$$

På motsvarande sätt kan  $y$  beräknas.

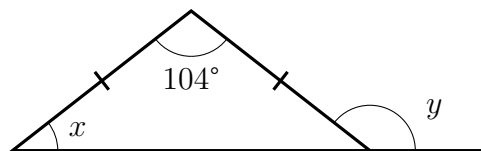
$$y = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

**Svar**  $x = 105^\circ$  och  $y = 80^\circ$ .

**Kommentar** I en fyrhörning som är inskriven i en cirkel är summan av motstående vinklar  $180^\circ$ . Det går naturligtvis att använda den satsen i stället för randvinkelsatsen.

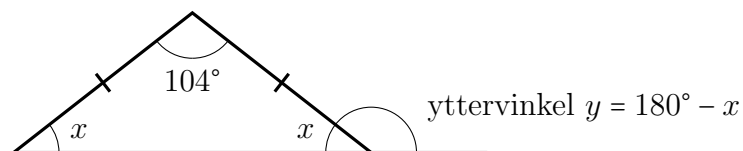
## 11 Bestäm vinklar i triangel

Bestäm vinklarna  $x$  och  $y$  i triangeln nedan.



## 11 LÖSNING

Triangeln är likbent med en vinkel  $104^\circ$  och två lika vinklar  $x$ .



Triangelns vinkelsumma är  $180^\circ$ .

$$180^\circ = 104^\circ + 2x$$

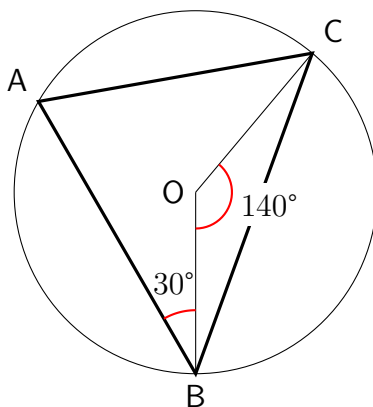
$$x = 38^\circ$$

$$y = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$$

**Svar**  $x = 38^\circ$  och  $y = 142^\circ$

## 12 Geometriskt problem

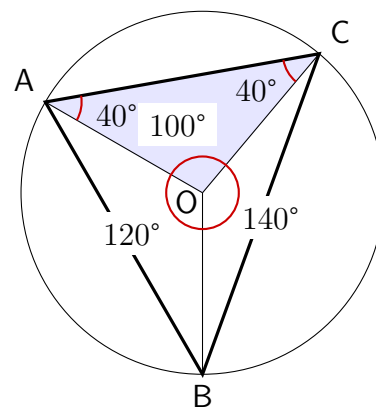
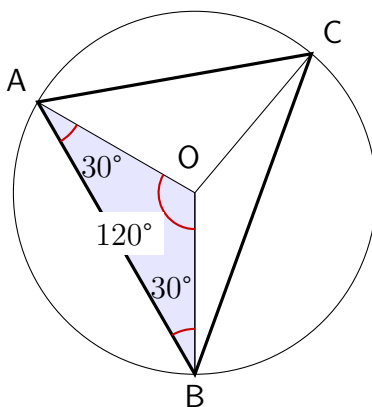
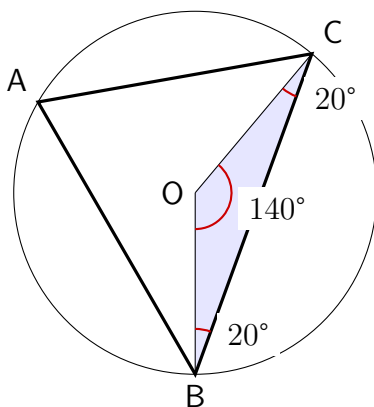
Punkterna A, B och C ligger på en cirkel. O är cirkelns medelpunkt. Bestäm vinklarna A, B och C. Mätning i figur accepteras ej.



## 12 LÖSNING

Det finns olika sätt lösa problem av denna typ.

### Variant I



Låt  $\angle$  beteckna vinkel och  $\triangle$  triangel. Med kunskap om att triangelns vinkelsumma är  $180^\circ$  kan följande beräknas.

|                 |             |                                                              |     |                                      |
|-----------------|-------------|--------------------------------------------------------------|-----|--------------------------------------|
| $\triangle BOC$ | likbent med | $\angle BOC = 140^\circ$                                     | ger | $\angle OBC = \angle OCB = 20^\circ$ |
| $\triangle AOB$ | likbent med | $\angle OAB = \angle OBA = 30^\circ$                         | ger | $\angle AOB = 120^\circ$             |
| $\triangle AOC$ | likbent med | $\angle AOC = 360^\circ - 140^\circ - 120^\circ = 100^\circ$ | ger | $\angle OAC = \angle OCA = 40^\circ$ |

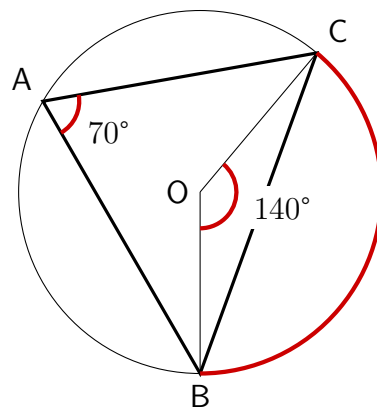
Nu kan de sökta vinklarna A, B och C beräknas

$$\begin{aligned}\angle A &= \overbrace{\angle BAO}^{30^\circ} + \overbrace{\angle OAC}^{40^\circ} = 70^\circ \\ \angle B &= \overbrace{\angle ABO}^{30^\circ} + \overbrace{\angle OBC}^{20^\circ} = 50^\circ \\ \angle C &= \overbrace{\angle OCA}^{40^\circ} + \overbrace{\angle OCB}^{20^\circ} = 60^\circ\end{aligned}$$

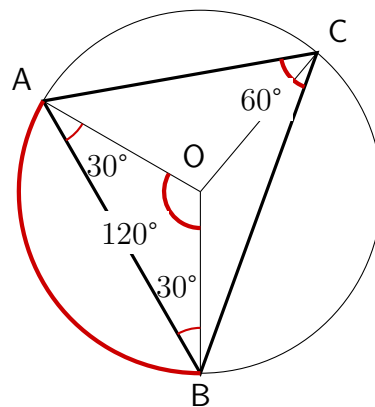
**Svar**  $A = 70^\circ$ ,  $B = 50^\circ$  och  $C = 60^\circ$ .

### Variant II

Randvinkeln BAC till cirkelbågen BC är hälften så stor som medelpunktsvinkeln BOC till samma cirkelbåge. Medelpunktsvinkeln är  $140^\circ$ , randvinkeln A är  $70^\circ$ .



Triangeln AOB är likbent med basvinklarna  $30^\circ$  och toppvinkeln  $120^\circ$ . Randvinkeln, C, till cirkelbågen, AB, är hälften så stor som medelpunktsvinkeln, AOB, till samma cirkelbåge. Medelpunktsvinkeln (toppvinkeln) är  $120^\circ$ . Randvinkeln C är  $60^\circ$ .



Med två vinklar kända i triangeln ABC blir vinkel B  $50^\circ$ .

**Svar**  $A = 70^\circ$ ,  $B = 50^\circ$  och  $C = 60^\circ$ .



### 13 Två andragradsekvationer

Lös ekvationerna.

a)  $x^2 - 3x = 0$

b)  $x^2 - 2x - 8 = 0$

### 13 LÖSNING

a) Ekvationen är en andragradsekvation. Alla andragradsekvationer kan lösas med  $pq$ -formeln. Några går att lösa enklare utan  $pq$ -formel. Denna ekvation kan lösas med faktorisering.

$$0 = x^2 - 3x = \underbrace{x}_{x=0} \underbrace{(x-3)}_{x=3}$$

Svar a)  $x = 0$  respektive  $x = 3$ .

b) Denna ekvation måste lösas med  $pq$ -formeln.

| Regler                      | <u>Andragradsekvationer</u>                                  |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | $x^2 + px + q = 0$                                           |
| $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ |
| $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$    |                                                              |

$$0 = x^2 \underbrace{-2}_{p=-2} x \underbrace{-8}_{q=-8}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - (-8)}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{9}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 3$$

Svar b)  $x = -2$  respektive  $x = 4$ .

## 14 Värdeminskning

En viss pryls värde ändras efter modellen  $V(t) = 4500 \cdot 0,82^t$  där  $V$  är värdet i kr och  $t$  är tid i år efter inköpet.

- a) Vad är inköpsvärdet för denna pryl?
- b) Med hur många procent ändras prylens värde per år?
- c) Beräkna  $V(2)$ .

## 14 LÖSNING

- a) Inköpsvärdet är värdet då  $t = 0$  alltså  $4\,500 \cdot \underbrace{0,82^0}_1$ .

**Svar a)** Inköpsvärdet är 4 500 kronor.

- b) Förändringsfaktorn är 0,82. Den årliga ändringen är

$$\underbrace{0,82}_{\text{slut}} - \underbrace{1}_{\text{start}} = \underbrace{-0,18}_{\text{ändring}} = -18\%.$$

**Svar b)** Pylens värde ändras varje år med  $-18\%$ .

- c) Beräkna  $V(2)$ .

$$V(2) = 4\,500 \cdot 0,82^2 = 3\,026$$

**Svar c)** 3 026 kronor.

## 15 Modell för vikt och längd

För barn mellan 5 år och 13 år finns en modell som ger sambandet mellan barnets vikt  $y$  kg och längd  $x$  m. Enligt denna modell är  $y = 2,4 \cdot 10^{0,8x}$ . Använd modellen och besvara följande frågor.

- Hur mycket väger ett barn som är 1,2 m?
- Vilken längd har ett barn som väger 32 kg?

## 15 LÖSNING

- a) Ett barn med längden 1,2 m väger

$$\underbrace{y}_{y=21,9} = 2,4 \cdot \overbrace{10^{0,8x}}^{x=1,2} = 2,4 \cdot 10^{0,8 \cdot 1,2} = 2,4 \cdot 10^{0,96}$$

Svar a) Barnet väger 21,9 kg,

- b) För ett barn som väger 32 kg gäller det att lösa ekvationen

$$32 = 2,4 \cdot 10^{0,8x}.$$

Detta är en exponentialekvation som löses genom logaritmering. Börja med att samla tal i vänsterledet och logaritmera därefter.

$$\begin{aligned} \frac{32}{2,4} &= 10^{0,8x} \\ \log \frac{32}{2,4} &= \log 10^{0,8x} \end{aligned}$$

Använd FORMELSAMLINGEN och miniräknaren.

### Logaritmer

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$$

$$\lg x + \lg y = \lg xy \quad \lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y} \quad \underline{\lg x^p = p \cdot \lg x}$$

$$\begin{aligned} \overbrace{\log \frac{32}{2,4}}^{1,1249} &= \overbrace{0,8x \cdot \log 10}^1 \\ 1,1249 &= 0,8x \\ x &= \frac{1,1249}{0,8} = 1,4062 \approx 141 \text{ cm} \end{aligned}$$

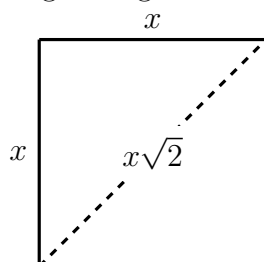
Svar b) 141 cm

## 16 Diagonal ...

Diagonalen på ett kvadratisk bord är 1,3 m. Beräkna bordets Area och Omkrets.

## 16 LÖSNING

Vi gör en generell lösning och startar med att rita ett kvadratisk bord med sidan  $x$ .



Bordet har

sidan  $x$

omkrets  $4 \cdot x$

area  $x^2$

diagonal  $\sqrt{2}x$  enligt Pythagoras sats.

Vårt bord har diagonalen 1,3 m vilket betyder att  $x\sqrt{2} = 1,3$  och därmed är  $x = \frac{1,3}{\sqrt{2}}$ . Vi får:

$$\text{sidan } x = \frac{1,3}{\sqrt{2}} = 0,92 \text{ m}$$

$$\text{omkrets } 4 \cdot x = \frac{4 \cdot 1,3}{\sqrt{2}} = 3,68 \text{ m}$$

$$\text{area } x^2 = \left(\frac{1,3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0,85 \text{ m}^2$$

$$\text{diagonal } \sqrt{2}x = 1,3 \text{ m.}$$

**Svar** Se tabellen ovan.

## 17 Lös ekvationer

Lös ekvationerna

a)  $3x + 5 = 7 + 2x$

b)  $\frac{5}{2x} = \frac{1}{2}$

## 17 LÖSNING

a) Lös ekvationen

$$\overbrace{3x + 5}^{\text{vänsterled}} = \overbrace{7 + 2x}^{\text{högerled}}$$

Flytta termer med  $x$  till vänsterled och tal till högerled.

$$3x - 2x = 7 - 5$$
$$x = 2$$

Svar a)  $x = 2$

b) Lös ekvationen

$$\overbrace{\frac{5}{2x}}^{\text{vänsterled}} = \overbrace{\frac{1}{2}}^{\text{högerled}}$$

Här är alla termer med  $x$  i vänsterledet och högerledet innehåller enbart tal. Problemet är att  $x$  finns i vänsterledets nämnare. Multiplicera båda led med  $x$

$$\frac{x \cdot 5}{2x} = \frac{x \cdot 1}{2}$$

och förkorta bort  $x$  vänsterledet.

$$\frac{5}{2} = \frac{x}{2}$$

Fortsätt.

$$x = 5$$

Svar b)  $x = 5$

**Kommentar** Det är tillåtet att multiplicera båda led i en ekvation med ett tal endast om talet är skilt från noll. I detta fall är talet  $x = 5$  och skilt från noll.

## 18 Ekvationssystem

Lös ekvationssystemet med valfri algebraisk metod.

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 0 \\ -x + 4y &= 5 \end{aligned}$$

## 18 LÖSNING

Det finns två metoder för att lösa linjära ekvationssystem. Substitutionsmetoden är enkel när antalet obekanta är 2. För problem med 3 eller fler obekanta är additionsmetoden lämpligare. Vi använder den enkla substitutionsmetoden.

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 0 & (1) \\ -x + 4y &= 5 & (2) \end{aligned}$$

Lös ut  $y$  ur ekvation (1), vilket ger

$$y = -x$$

Stoppa in detta  $y$  i ekvation (2), vilket ger

$$\begin{aligned} -x + 4(-x) &= 5 \\ -5x &= 5 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Stoppa in detta  $x$  i någon av ekvationerna (1) eller (2) för att bestämma  $y$ . Vi får

$$y = 1.$$

**Svar**  $x = -1$  och  $y = 1$ .

## 19 Värdeminskning

En bils värde ändrades från 210 000 kr till 156 000 kr under 4 års tid. Antag att värdeminskningen har varit lika mycket varje år. Bestäm den årliga procentuella värdeminskningen för bilen.

## 19 LÖSNING

Antag att den årliga förändringsfaktorn är  $x$ . Då gäller

$$\begin{aligned}156\,000 &= 210\,000 \cdot x^4 \\ \frac{156}{210} &= x^4 \\ x &= \left(\frac{156}{210}\right)^{1/4} = 0,92838\end{aligned}$$

*Förändring* är *slutvärde* minus *startvärde*. Den årliga förändringen blir

$$\underbrace{0,92838}_{\text{slut}} - \underbrace{1}_{\text{start}} = \underbrace{-0,071619}_{\text{förändring}} \approx -7,2\%$$

**Svar** Den årliga förändringen är  $-7,2\%$ .

## 20 Linjära ekvationer

Ett ekvationssystem består av två ekvationer. Varje ekvation innehåller två variabler  $x$  och  $y$  och en konstant. Ena ekvationen är  $2x - y = 10$ .

- a) Vad är den andra ekvationen om ekvationssystemet har oändligt många lösningar?
- b) Vad kan den andra ekvationen vara om ekvationssystemet saknar lösning?

## 20 LÖSNING

- a) Den andra ekvationen kan vara (en till kopia av)

$$2x - y = 10 \tag{1}$$

eller en multipel av ekvationen, exempelvis

$$4x - 2y = 20$$

**Svar a)** Se ovan.

- b) Den andra ekvationen kan exempelvis vara

$$2x - y = 11 \tag{2}$$

då blir skillnaden mellan (2) och (1)

$$0 = 1$$

vilket är uppenbart orimligt.

**Svar b)** Se ovan.



## 21 Linjärt ekvationssystem

Lena är mycket intresserad av gamla koppar. En butik säljer hennes favoritkoppar i två storlekar. Tabellen visar hennes inköp vid två olika tillfällen.

| Inköp | stora koppar | små koppar | totalt (Kr) |
|-------|--------------|------------|-------------|
| # 1   | 3 st         | 5 st       | 540         |
| # 2   | 4 st         | 8 st       | 820         |

Hur mycket kostar de stora respektive små kopparna per styck?

## 21 LÖSNING

Ställ upp ett system av ekvationer. Antag att en stor kopp kostar  $x$  kronor och att en liten kopp kostar  $y$ . Inköpen ger då följande ekvationer.

$$\begin{array}{rclcl} 3x & + & 5y & = & 540 & (1) & \text{inköp 1} \\ 4x & + & 8y & = & 820 & (2) & \text{inköp 2} \end{array}$$

Använd substitutionmetoden, lös ut  $x$  ur (1)

$$x = \frac{540}{3} - \frac{5y}{3} \quad (3)$$

Eliminera  $x$  ur (2) vilket ger.

$$\begin{array}{rclcl} 4 \cdot \left[180 - \frac{5y}{3}\right] & + & 8y & = & 820 \\ \frac{-20y}{3} & + & 8y & = & 100 \\ \frac{4}{3}y & = & 100 \\ y & = & 75 \end{array}$$

Använd ekvation (3) och  $y = 75$  för att beräkna  $x$ .

$$\begin{array}{rclcl} x & = & 180 - \frac{5 \cdot 75}{3} \\ x & = & 55 \end{array}$$

**Svar** Stora koppar kostar 55 och små 75 kronor.

## 22 Värdeökning

Anita och Göran är konstitresserade och köpte år 2008 på auktionshuset Sotheby's tavlan *The visitors* av Marlene Dumas (1953 – ) målad 1995. Anita har hittat en modell för hur hon tror att tavlans värde ändras med tiden.



Marlene Dumas *The visitors* 180×300 cm

Anitas modell är enligt följande:

$$V(t) = 3,1 \cdot 1,050^t$$

där  $V$  är värdet i miljoner pund och  $t$  är tiden i år efter inköpet.

- a) Vad är tavlans inköpsvärde?
- b) Vad är den procentuella värdeökningen?
- c) Beräkna  $V(10)$  och tolka resultatet.
- d) Efter hur lång tid är tavlans värde dubbelt så mycket som inköpsvärdet?
- e) Hur mycket var tavlan värd enligt modellen år 1995 då Marlene Dumas målade tavlan?
- f) Hur mycket var tavlan värd enligt modellen år 1951, alltså ett år innan Marlene Dumas föddes?
- g) Kommentera modellen.

## 22 LÖSNING

a) Tavlans inköpsvärde kan beräknas genom att stoppa in  $t = 0$  i formeln

$$\underbrace{V(t)}_{4,2} = 3,1 \cdot \overbrace{1,050^t}^{t=0}$$

ut trillar  $V(0) = 3,1$  miljoner pund.

**Svar a)** Inköspriset är  $V(0) = 3,1$  miljoner pund (ungefär 36 miljoner kronor).

b) Vad är den procentuella värdeökningen? Förändringsfaktorn är 1,050 och den årliga ökningen 0,050 vilket är 5,0%.

**Svar b)** Den årliga värdeökningen är 5,0%.

c) Beräkna  $V(10)$  och tolka resultatet.  
Stoppa in  $t = 10$  i formeln för värdeökning

$$\underbrace{V(10)}_{5,0496} = 3,1 \cdot \overbrace{1,050^t}^{t=10}$$

ut trillar  $V(10) = 5,0$ .

**Svar c)**  $V(10) = 5,0$  vilket är värdet i miljoner pund 10 år efter 2008.

d) Efter hur lång tid är tavlans värde dubbelt så mycket som inköpsvärdet? Lös exponentialekvationen

$$2 = 1,050^x.$$

Logaritmera ekvationen.

$$\log 2 = \log 1,050^x.$$

Använd FORMELSAMLINGEN och miniräknaren.

### Logaritmer

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$$

$$\lg x + \lg y = \lg xy \quad \lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y} \quad \underline{\lg x^p = p \cdot \lg x}$$

$$\begin{aligned}\log 2 &= x \cdot \log 1,050 \\ x &= \frac{\log 2}{\log 1,050} \approx 14,2\end{aligned}$$

**Svar d)** Det tar 14,2 år att dubbla värdet.

**e) Värdet år 1995?**  $1995 - 2008 = -13$

$$\underbrace{V(-13)}_{1.6440} = 3,1 \cdot \overbrace{1,050^t}^{t=-13}$$

**Svar e)** Enligt modellen var värdet 1,6 miljoner pund.

**f) Värdet år 1951?**  $1951 - 2008 = -57$

$$\underbrace{V(-57)}_{0.1922} = 3,1 \cdot \overbrace{1,050^t}^{t=-57}$$

**Svar f)** Enligt modellen var värdet 0,19 miljoner pund.

**Svar g)** Var försiktig med att använda modeller utanför det område där det finns mätdata. Modeller för priser på den nyckfulla konstmarknaden bör tas med stor försiktighet.

## Kursen Ma2 C

### 23 Ma2C Komplexa tal

Lös ekvationen  $x^2 = i^2 + 5$ .

### 23 LÖSNING

$$\begin{aligned}x^2 &= \overbrace{i^2}^{i^2=-1} + 5 \\x^2 &= -1 + 5 = 4 \\x &= \pm 2\end{aligned}$$

Svar  $x = \pm 2$

## 24 Ma2C Ekvation

Lös ekvationen  $\sqrt{x+2} = x-4$

## 24 LÖSNING

Ekvationen är

$$\sqrt{x+2} = x-4 \quad (1)$$

Kvadrera bägge leden för att få bort kvadratroten

$$x+2 = x^2 - 8x + 16 \quad (2)$$

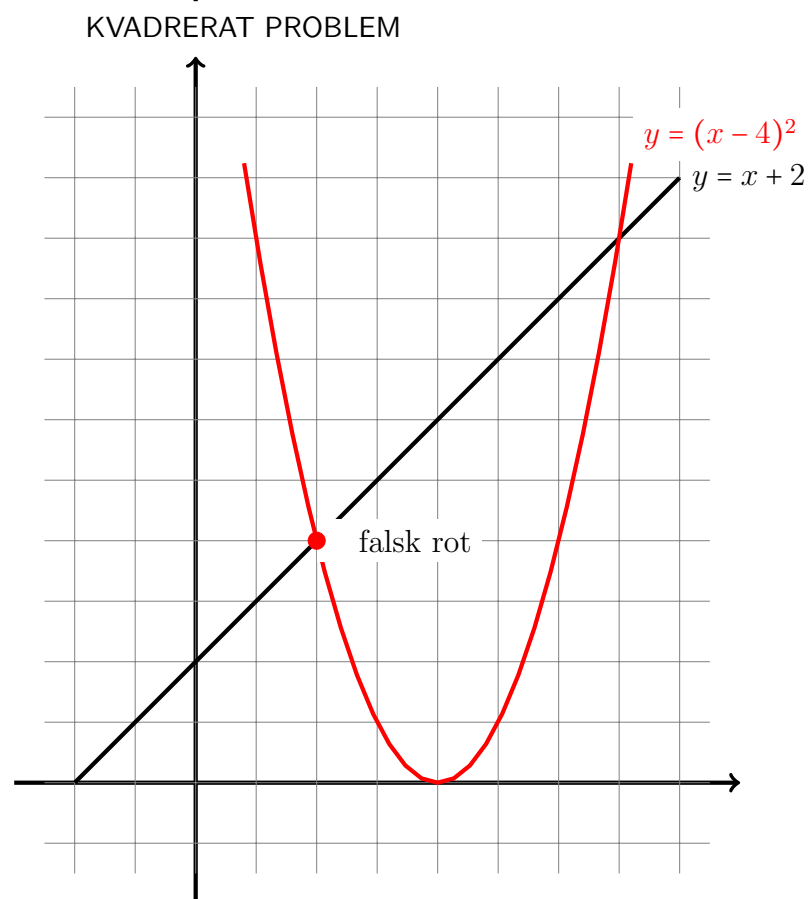
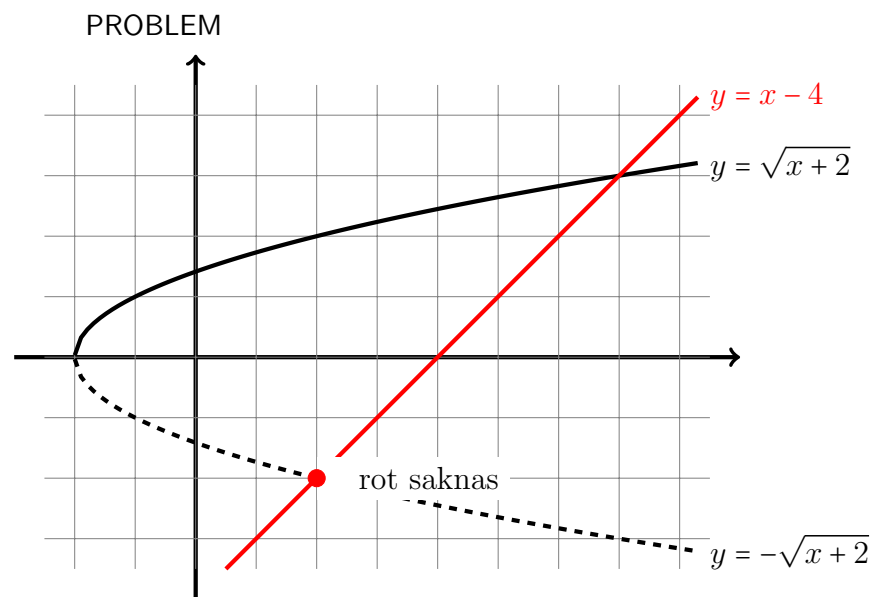
Flytta om och lös med  $pq$ -formeln (finns i FORMELSAMLINGEN)

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 \underbrace{-9}_{p} \cdot x + \underbrace{14}_{q} \\ x_{1,2} &= 4,5 \pm \sqrt{4,5^2 - 14} = 4,5 \pm \sqrt{6,25} = 4,5 \pm 2,5 \\ x_1 &= 4,5 + 2,5 = 7 \\ x_2 &= 4,5 - 2,5 = 2. \end{aligned}$$

Kontrollera rötterna, med  $x = 7$  blir vänsterledet i ekvation (1)  $\sqrt{7+2} = 3$  vilket stämmer med högerledet,  $7-4 = 3$ . För lösningen  $x = 2$  blir vänsterledet  $\sqrt{4}$  och högerledet är  $-2$ , därmed är  $x = 2$  inte en lösning till ekvation (1).

**Svar** Ekvationen har lösningen  $x = 7$ .

**Kommentar** Tänk på att ekvationen  $x^2 = 4$  har två lösningar  $x = \pm 2$  men att  $\sqrt{4} = +2$ . Se också figurer nästa sida. Det kvadrerade problemet har en falsk rot.

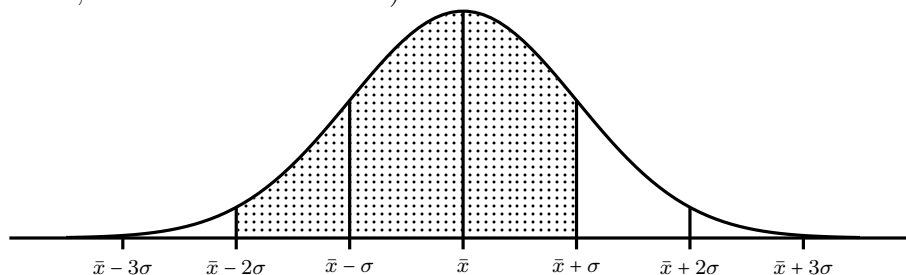


## Statistik

### 25 Normalfördelning

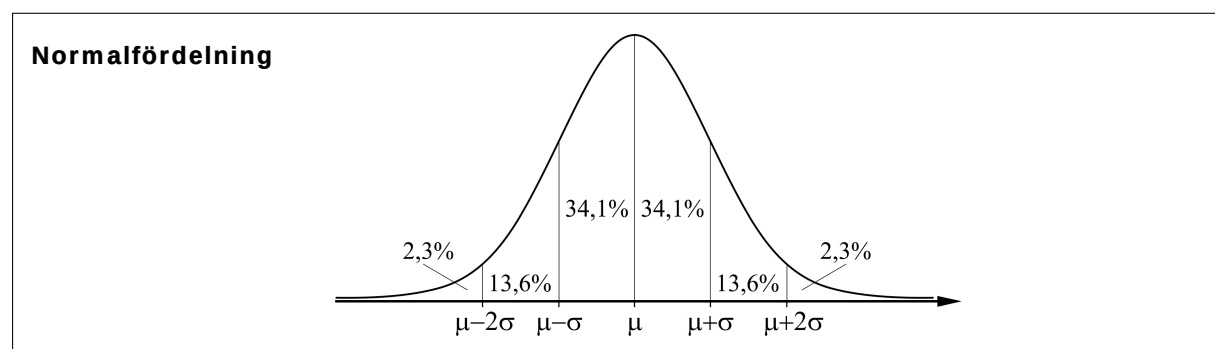
Hur stor del av det normalfördelade materialet nedan är markerat?

( $\bar{x}$  = medelvärde,  $\sigma$  = standardavvikelse)



### 25 LÖSNING

I FORMELSAMLINGEN finns normalfördelningen.



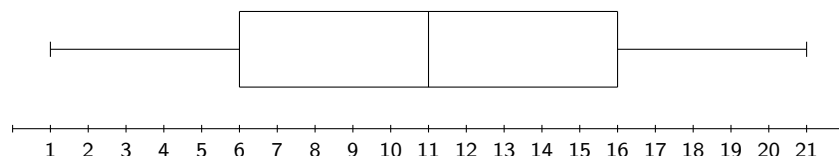
Det markerade området är  $13,6\% + 34,1\% + 34,1\% = 81,8\%$

**Svar** 81,8% är markerat.



## 26 Lådagram

Erik påstår att mer än halva klassen har klarat provet. Motivera om hans påstående är rätt eller fel. Provresultatet framgår av diagrammet.



### SLUTPROV

Maxpoäng: 21

Minst 10 poäng krävs för att klara provet!

## 26 LÖSNING

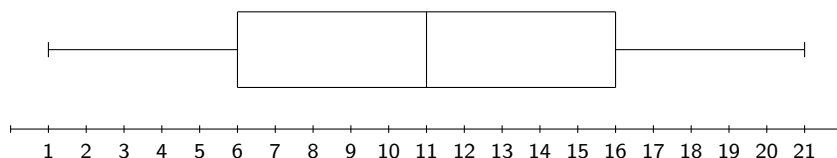
Av lådagrammet framgår att precis hälften av klassen har 11 poäng eller mer. Gränsen för godkänt är 10 poäng. Halva klassen har klarat provet men har *mer* än halva klassen klarat provet? För att *mer* än hälften ska ha klarat provet måste vi hitta en person som har 10 poäng. Det vet vi ingenting om. Fördelningen i nedre kvartil är inte känd. Det kan finnas en eller flera personer med 10 poäng men det kan också saknas någon enda person med 10 poäng. Påståendet att *mer* än halva klassen klarat provet går inte att avgöra med enbart kunskap om lådagrammet.

**Svar** Erik saknar grund för påståendet.

## 27 Lådagram

Bestäm följande för lådagrammet nedan:

- a) Variationsbredd
- b) Kvartilavstånd
- c) Median
- d) Nedre- respektive övre kvartil



## 27 LÖSNING

- a) Variationsbredd är skillnad mellan största värde, 21, och minsta värde, 1.

**Svar a)** Variationsbredden är 20.

- b) Kvartilavstånd är skillnad mellan övre kvartil, 16, och nedre kvartil, 6.

**Svar b)** Kvartilavståndet är 10.

- c) Median?

Medianen är det tal så att hälften av talen är större än medianen och andra hälften är mindre än medianen. I uppgiften är medianen 11.

**Svar c)** Medianen är 11.

- d) En fjärdedel av observationerna är mindre än nedre kvartilen (även kallad första kvartilen eller undre kvartilen) och tre fjärdedelar är mindre än den övre kvartilen (även kallad tredje kvartilen). Nedre kvartil är 6 och övre kvartil är 16.

**Svar d)** Nedre kvartil är 6 och övre kvartil är 16.

## 28 Lägesmått och spridningsmått

Eva och Linda kastar pil. De kastar 9 pilar var och får följande resultat:

|       |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Eva   | 12 | 8  | 13 | 10 | 10 | 8  | 12 | 10 | 11 |
| Linda | 12 | 20 | 6  | 17 | 2  | 14 | 8  | 3  | 15 |

Diskutera resultaten utifrån några lägesmått och spridningsmått.

## 28 LÖSNING

**Lägesmått** De vanligaste lägesmåten är medelvärde, median, typvärde.

**Eva** För Eva gäller att summan är 94 och medelvärdet 10,4. Medianen är det tal så att hälften av talen är större än medianen och andra hälften är mindre än medianen. Medianen bestämmer vi genom att först ordna talen och sedan välja talet i mitten.

$$8 \quad 8 \quad \underbrace{10 \quad 10 \quad \overbrace{10}^{\text{median}}}_{\text{typvärde} = 10} \quad 11 \quad 12 \quad 12 \quad 13$$

**Linda** För Linda gäller att summan är 97 och medelvärdet 10,8.

$$2 \quad 3 \quad 6 \quad 8 \quad \overbrace{12}^{\text{median}} \quad 14 \quad 15 \quad 17 \quad 20$$

Typvärde saknas.

**Spridningsmått** De vanligaste spridningsmåten är standardavvikelsen, kvartilavstånd och variationsbredd. Standardavvikelse är ett spridningsmått som förekommer tillsammans med normalfördelning. Dessa 9 + 9 data är inte normalfördelade och därför är standardavvikelse relevant.

**Eva** Variationsbredden är  $13 - 8 = 5$ .

$$8 \quad \underbrace{8 \quad 10}_{\text{nedre kvartil} \approx 9} \quad 10 \quad 10 \quad 11 \quad \underbrace{12 \quad 12}_{\text{övre kvartil} = 12} \quad 13$$

Kvartilavstånd för Eva är ungefär  $12 - 9 = 9$ . Kvartiler är inget bra begrepp att använda när antalet data är litet.

**Linda** Variationsbredden är  $20 - 2 = 18$ .

$$2 \quad \underbrace{3 \quad 6}_{\text{nedre kvartil} \approx 4,5} \quad 8 \quad 12 \quad 14 \quad \underbrace{15 \quad 17}_{\text{övre kvartil} \approx 16} \quad 20$$

Kvartilavstånd för Linda är ungefär 11.

## 29 Lådagram

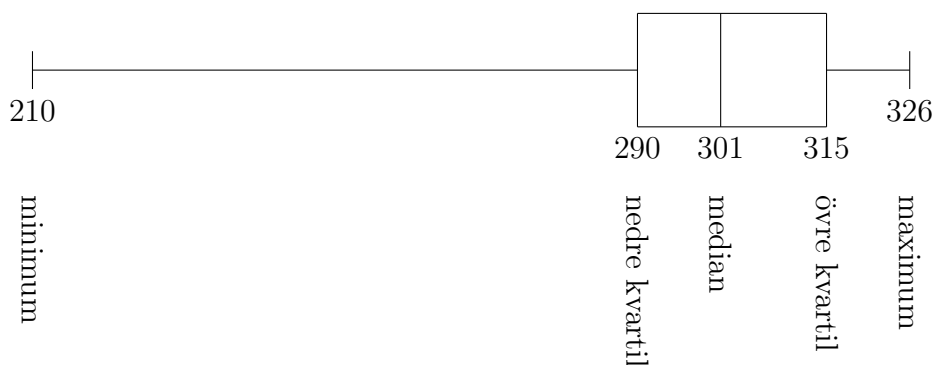
Sture studerar ett lådagram och kan då utläsa att minsta värdet är 210, nedre kvartilen är 290, medianen är 301, övre kvartilen är 315 och största värdet är 326.

Bestäm (om möjligt)

- a) variationsbredden
- b) kvartilavståndet
- c) medelvärde.

## 29 LÖSNING

Den vanligaste varianten av lådagrammet kallas på engelska box-and-whiskers plot och sammanfattar materialet med hjälp av fem värden: medianvärdet, nedre (undre) och övre kvartilen samt minimum och maximum. Kvartilavståndet kallas avståndet mellan övre och nedre (undre) kvartilen, det vill säga längden på lådan. Den undre kvartilen markerar det 25% värdet, och den övre kvartilen markerar det 75%. Lådan innehåller alltså 50% av värdena.



**Svar a)** variationsbredden  $326 - 210 = 116$

**Svar b)** kvartilavståndet  $315 - 290 = 25$

**Svar c)** medelvärde Går ej att bestämma.  
Fördelningen inom lådagrammet ej känd.

### 30 Normalfördelning

Ett företag tillverkar chips. På chipspåsarna står det att innehållet väger 310 g. Chipspåsarnas vikt är normalfördelade kring medelvärdet 330 g med standardavvikelsen 10 g.

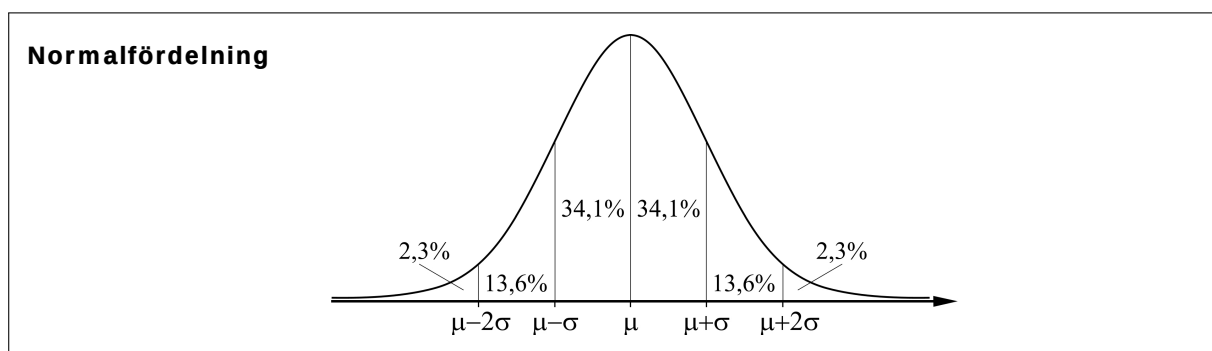
- a) Hur många av påsarna kan förväntas innehålla mer än 310 g?

Företaget inser att de kan spara pengar genom att fylla påsarna med lite mindre chips och ändå behålla sina nöjda kunder. De vill dock att minst 84,1% av påsarna ska innehålla minst 310 g chips. Standardavvikelsen antas fortfarande vara 10 g.

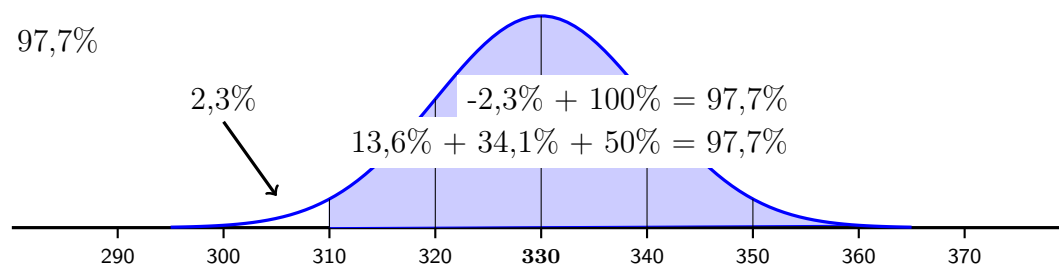
- b) Beräkna det nya medelvärdet som motsvarar ovanstående krav.

### 30 LÖSNING

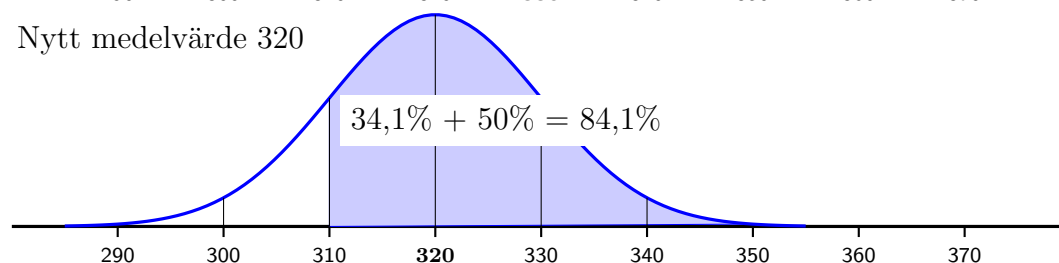
Normalfördelningen finns i FORMELSAMLINGEN.



**Svar** 97,7%



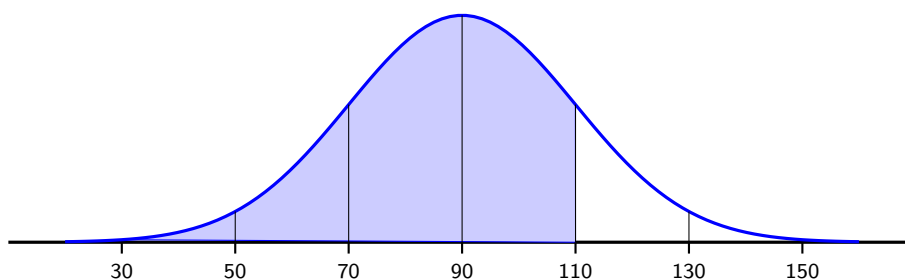
**Svar** Nytt medelvärde 320



### 31 Normalfördelning

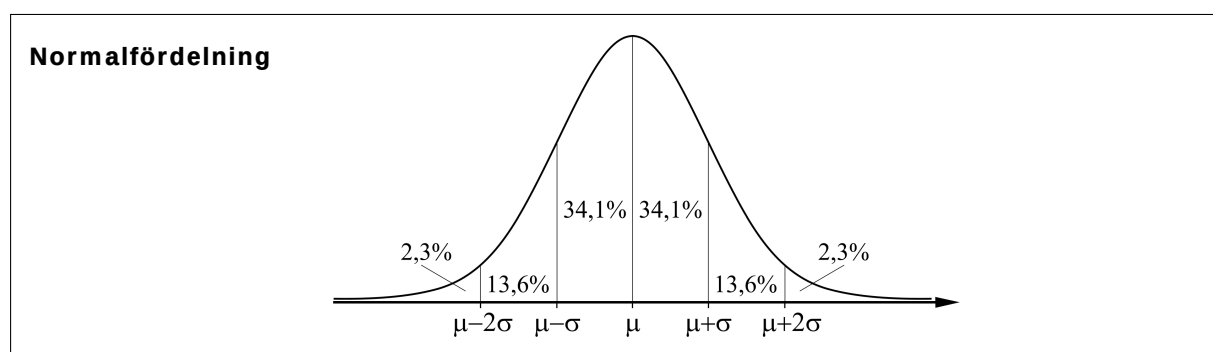
Ugglorna i Uggelboby kan bli extremt gamla. Bestäm följande med hjälp av nedanstående normalfördelningskurvan:

- a) Medelåldern för ugglorna
- b) Standardavvikelsen
- c) Hur många procent av ugglorna lever upp till 110 (färgade området)?



### 31 LÖSNING

I FORMELSAMLINGEN finns normalfördelningen.



**Svar a)** Medelvärde är 90 år.

**Svar b)** Standardavvikelsen är 20 år. ( $110 - 90 = 20$  eller  $90 - 70 = 20$ .)

**Svar c)** 84% av ugglorna lever upp till 110 år (färgade området). 50% (mellan 0 och 90 år) plus 34% (mellan 90 och 110 år).

## 32 Blodtryck, linjärt samband

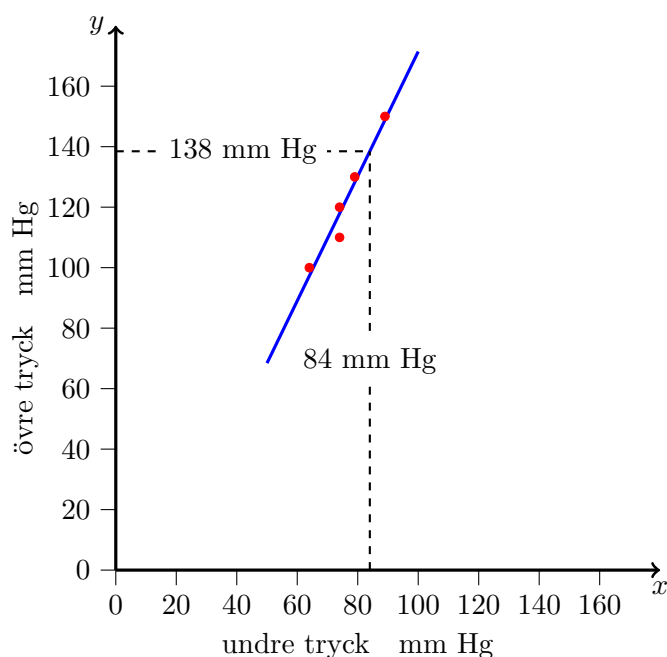
Tabellen visar över och undre blodtryck för 5 personer.

|             |     |     |     |     |     |     |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| undre tryck | $x$ | 64  | 74  | 74  | 79  | 89  |
| övre tryck  | $y$ | 100 | 110 | 120 | 130 | 150 |

- Anpassa en rät linje till dessa data.
- Beräkna det övre trycket enligt modellen för en person som har ett undre tryck på 84 mm Hg.

## 32 LÖSNING

Problem med linjär regression löses lämpligen med räknehjälpmedel som dator eller miniräknare. I länken<sup>1</sup> [linjär regression på TI-82](https://www.youtube.com/watch?v=Ynyf23hgkds) presenteras en lösning på detta problem.



**Svar a)**  $\text{övre tryck} = 2,06 \times \text{undre tryck} - 34,6 \text{ mm Hg}$

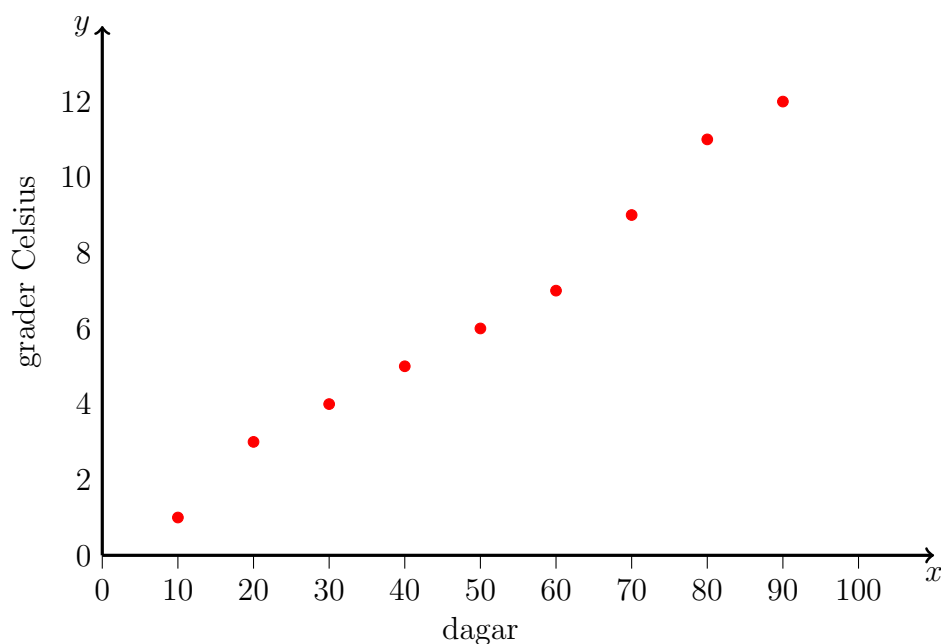
**Svar b)** Trycket blir 138 mm Hg

<sup>1</sup>Länken är <https://www.youtube.com/watch?v=Ynyf23hgkds> Sök på *Johan Falk* och *linjär regression*. Johan Falk är lärare på Rudbeckskolan och har publicerat mycket matematik på youtube.

### 33 Linjärt samband

Dan har studerat utomhustemperaturen under några dagar på våren och antecknat enligt tabellen och diagrammet nedan.

| Dag        | nr | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Temperatur | °C | 1  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 9  | 11 | 12 |



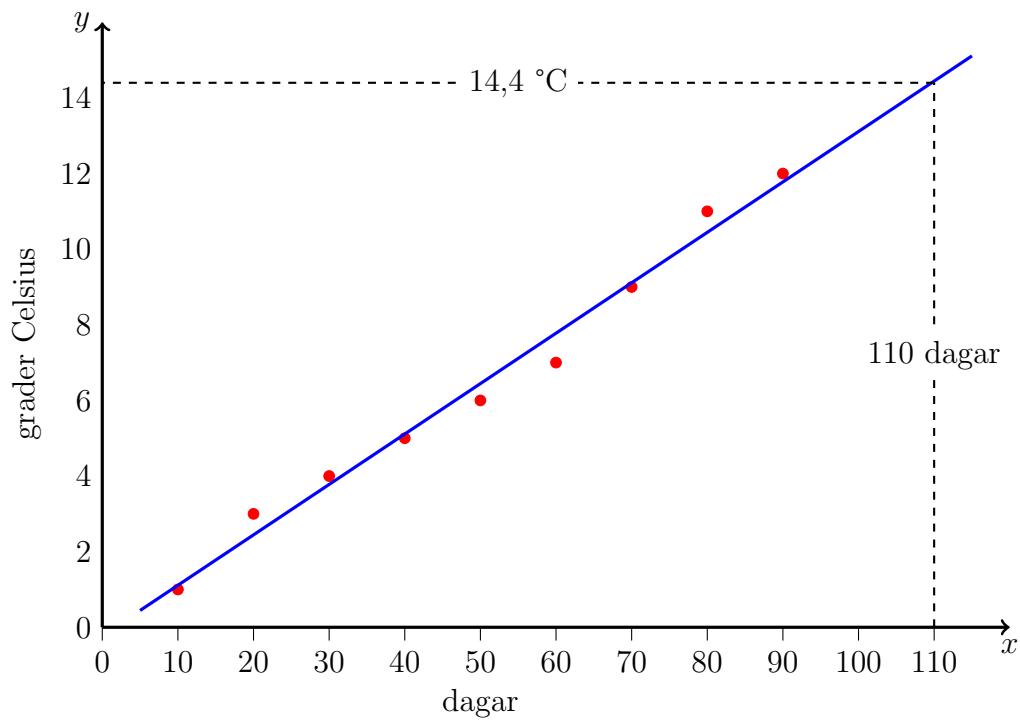
- Finns det någon korrelation mellan temperatur och dagarna?
- Anpassa ett linjärt samband för ovanstående.
- Beräkna temperaturen för dag 110 med hjälp av sambandet.

### 33 LÖSNING

**Svar a)** Det finns ett tydligt linjärt beroende mellan dagar och temperatur.

**b)** Problem med linjär regression löses lämpligen med räknehjälpmedel som dator eller miniräknare. I länken [linjär regression på TI-82](#) presenteras hur problem av denna typ löses.





**Svar b)** Modellen blir  $y = -0,22 + 0,133 \cdot x$

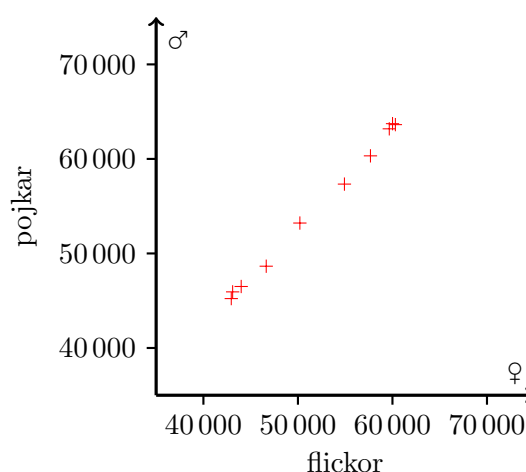
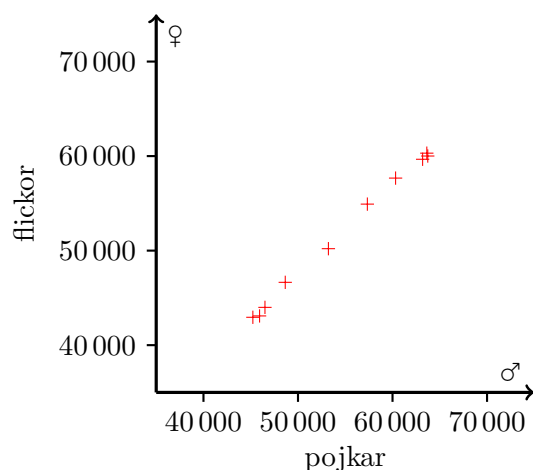
**c)**  $\underbrace{y}_{14,4^\circ} = -0,22 + 0,133 \cdot \overbrace{x}^{110}$

**Svar c)** Temperaturen för dag 110 blir  $14,4^\circ$ .

### 34 Korrelation och kausalitet

Åren 1990 till 1999 föddes det mellan 88 000 och 124 000 barn i Sverige varje år. Data från Statiska centralbyråns finns i tabellen nedan. Data presenteras också i två grafer.

| År      |   | 1990  | 1991  | 1992  | 1993  | 1994  | 1995  | 1996  | 1997  | 1998  | 1999  |
|---------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Pojkar  | ♂ | 63628 | 63729 | 63184 | 60325 | 57337 | 53217 | 48651 | 46505 | 45936 | 45225 |
| Flickor | ♀ | 60310 | 60008 | 59664 | 57673 | 54920 | 50205 | 46646 | 43997 | 43092 | 42948 |



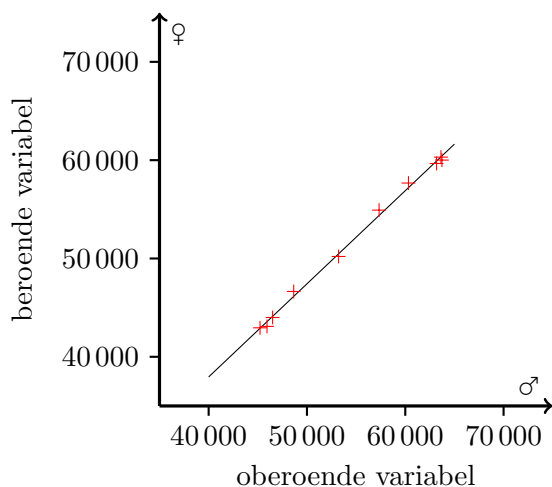
- Anpassa ett linjärt samband till ovanstående (välj beroende och oberoende variabel).
- Diskutera kring begreppen korrelation och kausalitet.

### 34 LÖSNING

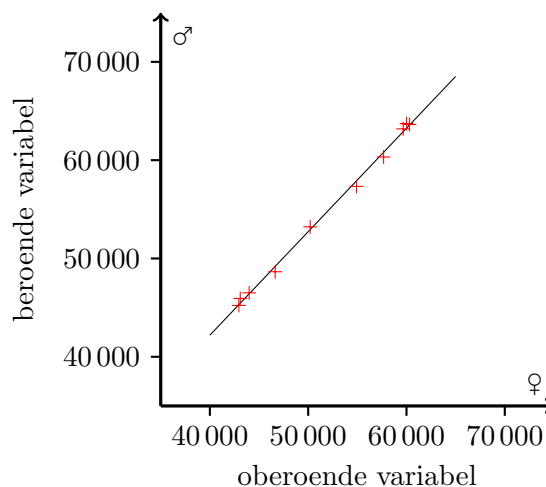
**Svar a)** Problem med linjär regression löses lämpligen med räknehjälpmedel som dator eller miniräknare. I länken<sup>2</sup> [linjär regression på TI-82](https://www.youtube.com/watch?v=Ynyf23hgkds) presenteras hur problem av denna typ löses. Det finns två möjligheter att välja oberoende variabler. Båda varianterna presenteras.

<sup>2</sup>Länken är <https://www.youtube.com/watch?v=Ynyf23hgkds> Sök på *Johan Falk* och *linjär regression*. Johan Falk är lärare på Rudbeckskolan och har publicerat mycket matematik på youtube.

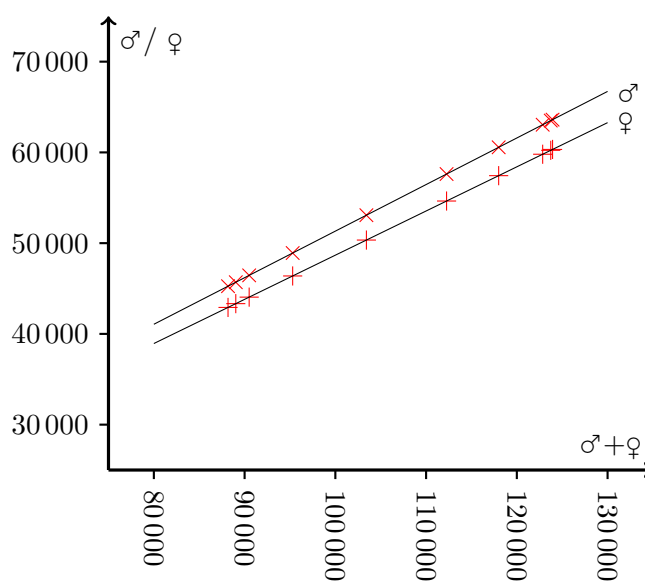
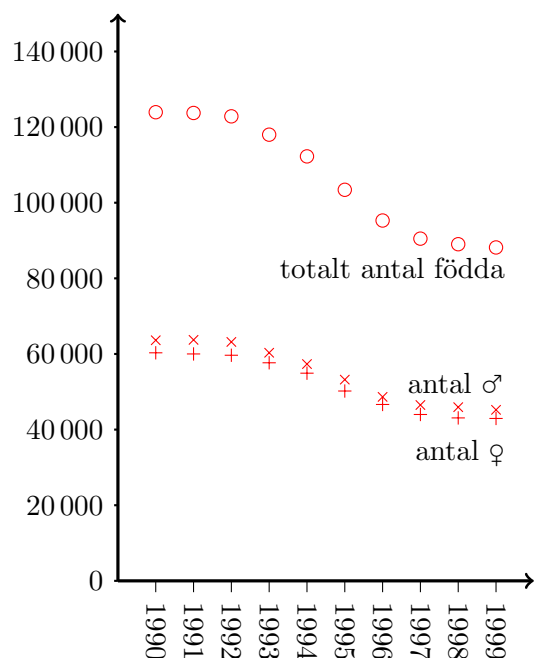
$$\text{flickor} = 55,13 + 0,947373 \times \text{pojkar}$$



$$\text{pojkar} = 90,27 + 1,052692 \times \text{flickor}$$



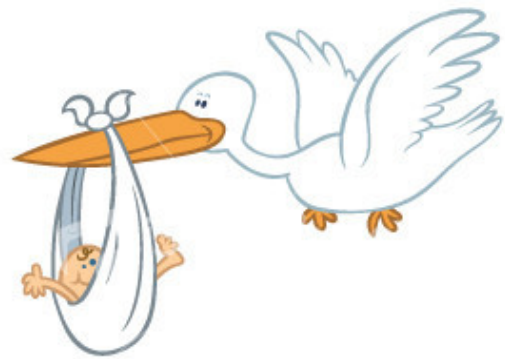
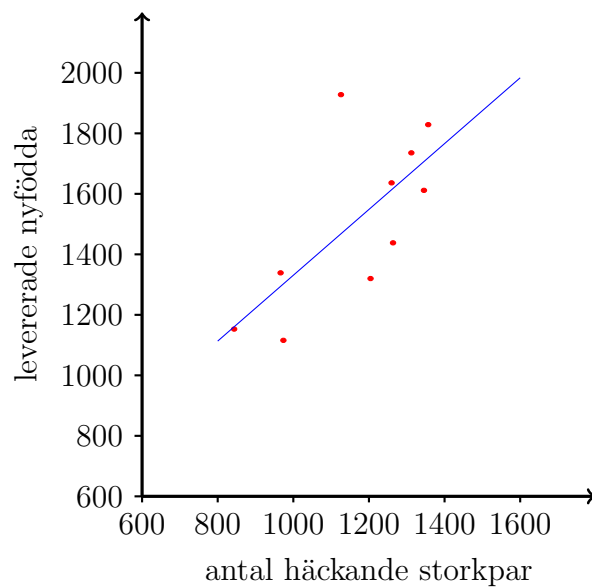
**Svar b)** Skilj på korrelation (samvariation) och kausalitet (orsakssamband). Att två faktorer är korrelerade betyder inte att en variabel orsakar den andra. I exemplet är det inte så att antalet födda pojkar är orsak till antalet födda flickor. Det är inte heller så att antalet födda flickor är orsak till antalet födda pojkar. Det kan finnas någon helt annan bakomliggande faktor som står för orsakssambandet. I detta exempel är det totala antalet födda barn som är orsak till antalet pojkar och flickor och antalet par i fruktsam ålder som är den bakomliggande faktorn. Två grafer illustrerar.



**Kommentar** I uppgifter av denna typ är det ditt resonemang som bedöms.

### 35 Korrelation och kausalitet

I grafen presentas data från Berlin åren 1990 till 1999. På  $x$ -axeln finns antalet häckande storkpar i Brandenburg som är omgivningen kring Berlin. På  $y$ -axeln finns antalet nyfödda barn i Berlin som inte fötts på sjukhus. I grafen finns också ett anpassat linjärt samband mellan  $x$  och  $y$ .



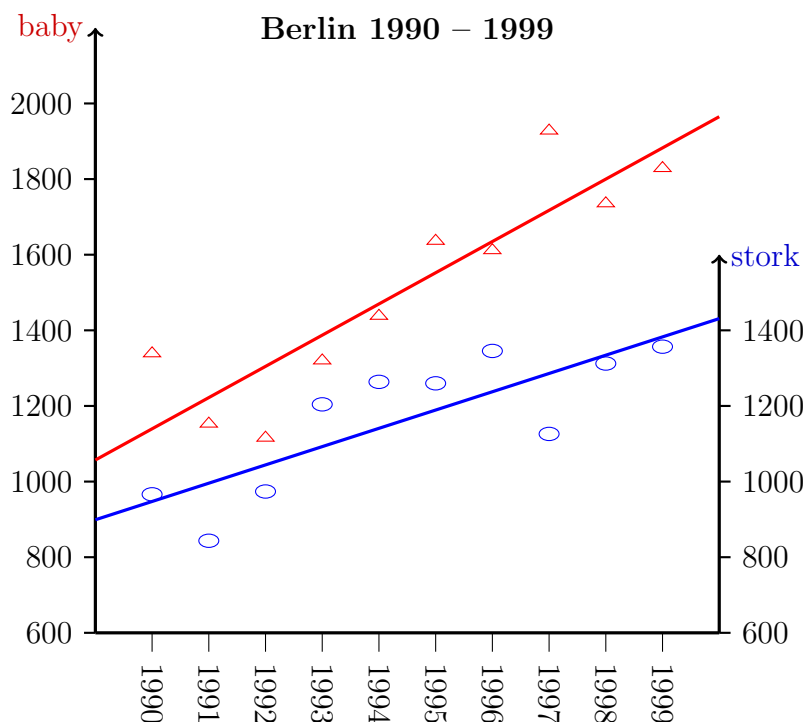
Data visar en signifikant korrelation mellan ökningen av antalet häckande storkar och ökade leveranserna av bebisar utanför stadens sjukhus.

- a) Är det storkar som levererar de bebisar som inte är födda på sjukhus?
- b) Diskutera kring begreppen korrelation och kausalitet.

### 35 LÖSNING

Svar a) Naturligtvis kommer inga nyfödda med storkar.

b) Det är inte en slump att antalet barn som inte fötts på sjukhus är korrelerade med antalet häckande storkpar. Det finns en gemensam bakomliggande faktor, urbaniseringen. Med ökat antal inflyttade till Berlin med omgivning ökar antalet nyfödda barn. Nyinflyttade behöver mer bostäder och med fler bostäder blir det också fler tak. Storkar tycker om att bygga på hustak. Det är alltså ingen slump att de två variablerna samvarierar.



Det finns fler exempel på samvariation mellan storkar och nyfödda. Under perioden 1945-1957 är det hög korrelationen mellan antalet häckande storkar i Köbenhavn och antalet barn som föddes i staden. Detta var perioden strax efter andra världskriget och urbaniseringen var stor.

**Kommentar** I uppgifter av denna typ är det ditt resonemang som bedöms.