

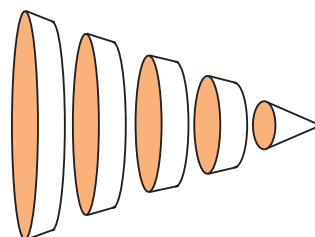
3.6 Rotationsvolymer

Skivmetoden

Hur kan vi beräkna volymen av en kropp med hjälp av en integral?

Exempel Vi visar ett exempel med en kon där volymen också kan beräknas med formeln $V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$

Vi börjar med att dela upp konen i ett antal skivor enligt figuren. Tvärsnittsareorna är då cirkclar.



Volymen av en skiva kan approximeras till en cylinder med tvärsnittsarean $A(x_i)$ och höjden Δx_i .

Volymen av en cylinderskiva ges av $\Delta V = A(x_i) \cdot \Delta x_i$.

Vi får ett ungefärligt värde på konens volym om vi summerar skivornas volymer

$$V \approx \sum_{i=1}^5 A(x_i) \cdot \Delta x_i$$

Om vi låter antalet skivor öka obegränsat så går Δx mot noll och vi kan beräkna konens volym med en integral

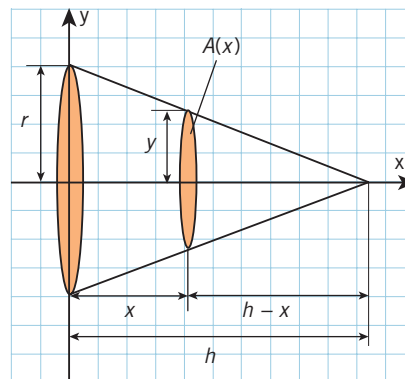
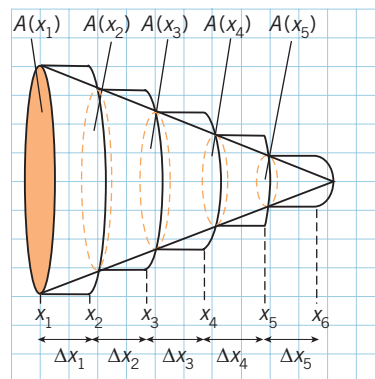
$$V = \int_0^h A(x) dx$$

där $A(x)$ är tvärsnittsarean som beror av x och h är konens höjd.

Med hjälp av likformighet kan vi skriva en formel för hur konens tvärsnittsarea A beror av x .

$$\frac{y}{r} = \frac{h-x}{h} \Leftrightarrow y = \frac{r(h-x)}{h}$$

$$A(x) = \pi y^2 = \pi \left(\frac{r(h-x)}{h} \right)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2} (h-x)^2$$



Volymen kan sedan beräknas med integralen

$$V = \int_0^h A(x) dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} (h-x)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h (h-x)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h (h^2 - 2hx + x^2) dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[h^2x - hx^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Volymen $V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$ överensstämmer med den välkända formeln för volymen av en kon.

Sammanfattning

Volymen av en kropp kan beräknas med integralen

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

där $A(x)$ är tvärsnittsarean vinkelrätt mot x -axeln.
 a och b är gränserna i x -led.

rotationsvolym skivmetoden

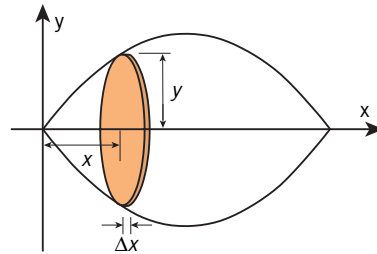
En *rotationsvolym* uppstår då en kurva rotera runt x -axeln eller runt y -axeln. Volymen av rotationskroppen kan beräknas med *skivmetoden*.

Rotation kring x -axeln:

$$\Delta V = \pi y^2 \cdot \Delta x$$

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx$$

där a och b är gränserna i x -led.

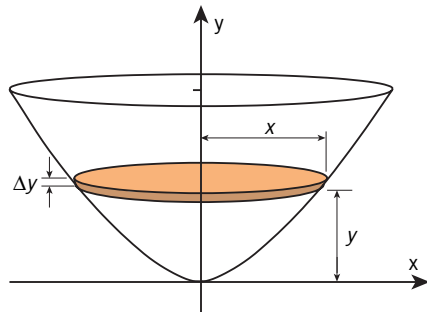


Rotation kring y -axeln:

$$\Delta V = \pi x^2 \cdot \Delta y$$

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy$$

där a och b är gränserna i y -led.



3601

Beräkna det exakta värdet av rotationskroppens volym för det område som begränsas av kurvan $y = 4 - x^2$ och koordinataxlarna när det roterar runt

- a) x -axeln b) y -axeln

- a) Den övre integrationsgränsen ges av skärningen med x -axeln, $x = 2$.

Tvärsnittsarean för en cirkulär skiva är πy^2 .

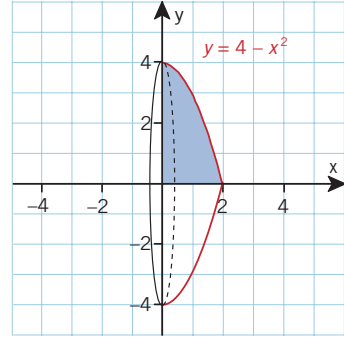
Volymen av en skiva

$$\Delta V = \pi y^2 \Delta x = \pi(4 - x^2)^2 \Delta x$$

Hela kroppens volym

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi(4 - x^2)^2 dx = \\ &= \int_0^2 \pi(16 - 8x^2 + x^4) dx = \\ &= \pi \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = \frac{256\pi}{15} \approx 53,6 \end{aligned}$$

Svar: Kroppens volym är $256\pi/15$ volymenheter.



- b) Den övre integrationsgränsen ges av skärningen med y -axeln, $y = 4$.

Tvärsnittsarean för en cirkulär skiva är πx^2 .

$$y = 4 - x^2 \text{ ger att } x = \sqrt{4 - y}$$

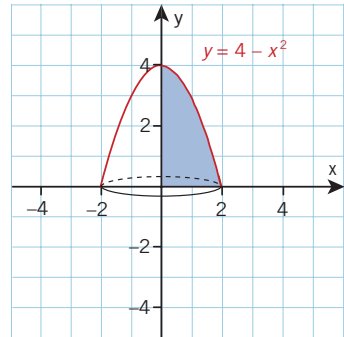
Volymen av en skiva

$$\Delta V = \pi x^2 \Delta y = \pi(\sqrt{4 - y})^2 \Delta y$$

Hela kroppens volym

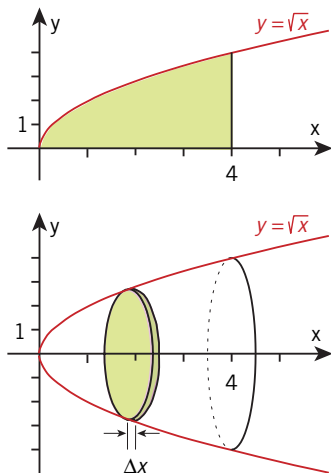
$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi(\sqrt{4 - y})^2 dy = \\ &= \int_0^4 \pi(4 - y) dy = \\ &= \pi \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left(16 - \frac{16}{2} \right) = 8\pi \approx 25,1 \end{aligned}$$

Svar: Kroppens volym är 8π volymenheter.



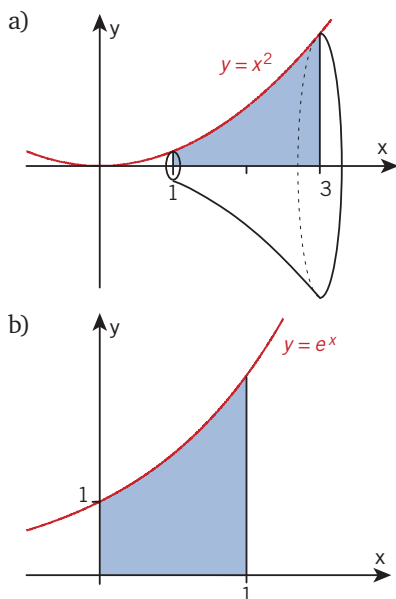
- 3602** Det färgade området får rotera kring x -axeln.

a

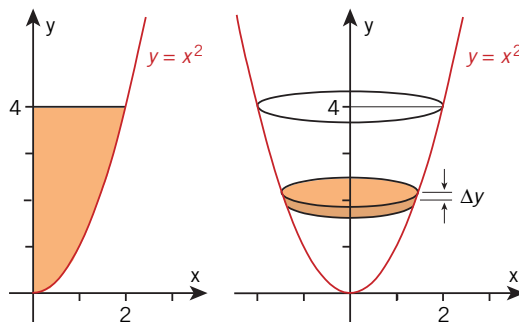


- Ställ upp ett uttryck för volymen av en skiva i rotationskroppen som funktion av x .
- Ställ upp en integral för beräkning av rotationskroppens volym.
- Beräkna volymen.

- 3603** Det färgade området roterar kring x -axeln. Beräkna rotationskroppens volym med skivmetoden.



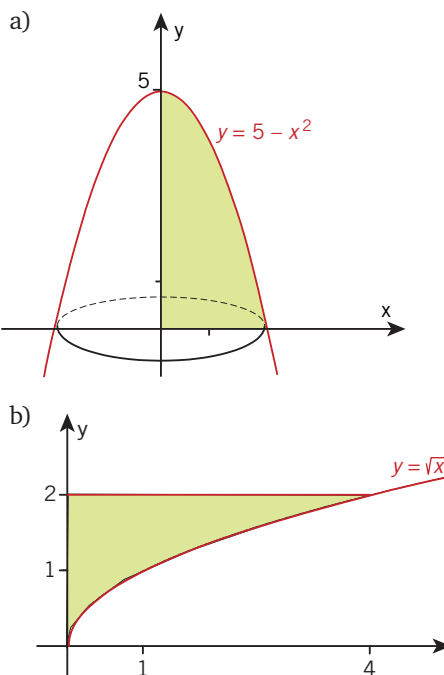
- 3604** Det färgade området får rotera kring y -axeln.



- Ställ upp ett uttryck för volymen av en skiva i rotationskroppen som funktion av y .
- Ställ upp en integral för beräkning av rotationskroppens volym.
- Beräkna volymen.

- 3605** Det färgade området roterar kring y -axeln.

Beräkna rotationskroppens volym med skivmetoden.



3606 Följande områden roterar kring x -axeln.

Rita en skiss och beräkna rotationskroppens volym med skivmetoden.

- a) $y = 5 - x$, x -axeln,
linjerna $x = 1$ och $x = 4$
- b) $y = x^2$, x -axeln,
linjerna $x = 1$ och $x = 2$
- c) $y = 2x - x^2$ och x -axeln

3607 Vilken volym är störst?

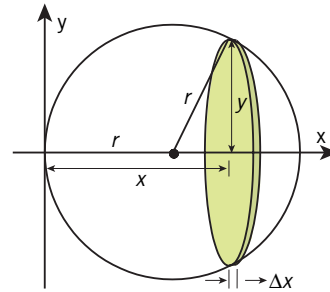
- I Området som begränsas av $y = 0,5x^2$, x -axeln och $x = 2$ roterar kring x -axeln.
- II Området som begränsas av $y = 0,5x^2$, y -axeln och $y = 2$ roterar kring y -axeln.

3608 Kurvan $y = x^2 - 1$ innesluter i 4:e kvadranten ett område tillsammans med koordinataxlarna.

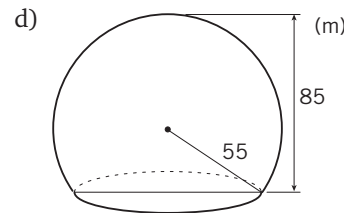
Beräkna den volym som uppstår då detta område roterar kring y -axeln.

3609 Volymen av ett klot kan beräknas genom att klotet delas upp i "cirkulära skivor".

b



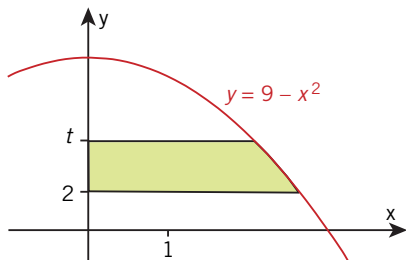
- a) Uttryck y i r och x och ställ upp ett uttryck för volymen ΔV av en skiva.
- b) Ställ upp en integral för beräkning av klotets volym V .
- c) Beräkna integralen.



Globen i Stockholm kan anses vara ett sfäriskt segment med höjden 85 m och radien 55 m.

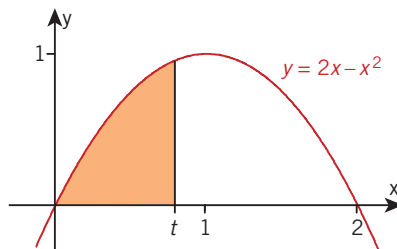
Beräkna Globens volym.

- 3610** Det färgade området i figuren alstrar vid rotation kring y -axeln en kropp med volymen 12π volymenheter. Bestäm talet t .



- 3611** Det område som begränsas av kurvan $y = x^{-2}$ samt linjerna $y = 1$ och $y = e$ får rotera kring y -axeln. Bestäm rotationskroppens volym.
- 3612** Kurvan $y = 9 - x^2$ roterar kring x -axeln. Bestäm volymen av den ändliga kropp som då uppkommer. Svara exakt.
- 3613** Kurvan $y = \frac{12}{x}$ begränsar tillsammans med linjerna $x = 2$ och $y = 2$ ett ändligt område i första kvadranten. Detta område får rotera kring x -axeln. Bestäm rotationskroppens volym.
- 3614** Det område som begränsas av de positiva koordinataxlarna och kurvan $y = \sqrt{9 - 2x^2}$ får rotera kring y -axeln. Beräkna rotationskroppens volym.
- 3615** Kurvan $y = 3x^2 - x^3$ begränsar tillsammans med x -axeln ett område som får rotera kring x -axeln. Bestäm rotationskroppens volym.
- 3616** Låt det område som begränsas av kurvan $y = \ln x$, linjen $x = e$ samt x -axeln rotera kring y -axeln. Bestäm volymen av den uppkomna rotationskroppen.

- 3617** Det färgade området i figuren alstrar vid rotation kring x -axeln en kropp med volymen 2 volymenheter. Bestäm talet t med två decimaler.



- 3618** Det område som begränsas av de positiva koordinataxlarna och kurvan $y = \sin x + \cos x$ får rotera kring x -axeln. Bestäm rotationskroppens volym.
- 3619** Betrakta det ändliga område som begränsas av x -axeln och kurvan $y = a^2 - x^2$. Man låter området rotera, dels kring x -axeln, dels kring y -axeln. Bestäm den positiva konstanten a så att de två rotationskropparna får lika stor volym.
- 3620** Ett område i xy -planet begränsas av x -axeln, linjen $x = 1$ och kurvan $y = \sqrt{ax - a^2}$ där a är en konstant sådan att $0 < a < 1$. Låt området rotera kring x -axeln och bestäm a så att rotationskroppens volym blir maximal.
- 3621** Ställ upp en integral med vars hjälp följande område kan beräknas:
- Den volym som alstras då det område som begränsas av kurvan $y = x^2 + 1$ och linjen $y = 5$ får rotera kring $y = 5$.
 - Den volym som alstras då det område som begränsas av kurvan $y = \sqrt{8x}$ x -axeln och linjen $x = 2$ får rotera kring $x = 2$.