Polynomdivision

Division av tal

Vi startar med en ett tal ovanför bråkstrecket kallat divisor eller täljare och ett under bråkstrecket kallat dividend eller nämnare. När ett tal p, divisor, delas med q, dividend, kallas resultatet kvot. Ibland går division av två heltal jämt ut som

$$\frac{36}{12} = 3$$

$$\overbrace{36}^{\text{divisor}} = \underbrace{3}_{\text{kvot}} \cdot \overbrace{12.}^{\text{dividend}}$$

Ibland går divisionen inte jämt ut. Divisorn delas med dividenden

$$\frac{37}{12} = 3 + \frac{1}{12} = 3{,}083333\ldots$$

$$\overbrace{37}^{\text{divisor}} = \underbrace{3}_{\text{kvot}} \cdot \overbrace{12}^{\text{dividend}} + \underbrace{1}_{\text{rest}}$$

och resultatet blir en kvot plus en rest.

Division av polynom

Om ett polynom $f(x)$ divideras (delas) med $x - a$, får vi kvoten $q(x)$ och resten r.

$$\underset{\text{grad n}}{f(x)} = \underset{\text{grad 1}}{(x-a)}\ \underset{\text{grad n-1}}{q(x)} + \underset{\text{konstant}}{r}$$

Två användbara satser är restsatsen och faktorsatsen. De lyder som följer.

Restsatsen Om polynomet $f(x)$ divideras med $x - a \Rightarrow$ resten $f(a)$

Faktorsatsen Polynomet $f(x)$ har faktorn $x - a \Leftrightarrow f(a) = 0$

Det finns olika sätt för hur polynomdivision kan utföras, precis som det finns olika sätt för att utföra division av tal. Läroboken, använder ett sätt, liggande stolen. Ett alternativt sätt att utföra polynomdivision är enligt mönstret i följande exempel.

Exempel 1

Dela polynomet $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ med $x + 1$. Vi ska dela ett polynom av graden 3 med ett polynom av graden 1 och ansätter därför ett polynom av grad 2 och konstant restterm.

$$q(x) = Ax^2 + Bx + C$$

med okända koefficienter A, B, C. Vi får

$$\begin{array}{rcllllll}
x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & = & (x+1)(Ax^2 + Bx + C) + r \\
& = & Ax^3 & + & Bx^2 & + & Cx & + \\
& & & & Ax^2 & + & Bx & + & C + r \\
x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & = & Ax^3 & + & (B + A)x^2 & + & (C + B)x & + & C + r
\end{array}$$

Vänsterled och högerled är lika för *alla* x när följande är uppfyllt

lika 3-gradstermer	1	$=$	A	$\rightarrow$	A	$=$	1
lika 2-gradstermer	-2	$=$	$B + A$	$\rightarrow$	B	$=$	-3
lika 1-gradstermer	-5	$=$	$C + B$	$\rightarrow$	C	$=$	-2
lika konstanta termer	6	$=$	$C + r$	$\rightarrow$	r	$=$	8

Vi har alltså fått resultatet

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x+1)(x^2 - 3x - 2) + 8$$

Resultatet stämmer med restsatsen eftersom $f(-1) = 8$

$$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6 = 8$$

Exempel 2. Dela polynomet $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ med $x - 1$. Vi ska dela ett polynom av graden 3 med ett polynom av graden 1 och ansätter därför ett polynom av grad 2 och konstant restterm.

$$q(x) = Ax^2 + Bx + C$$

med okända koefficienter A, B, C. Vi får

$$\begin{array}{rcllllll}
x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & = & (x-1)(Ax^2 + Bx + C) + r \\
& = & Ax^3 & + & Bx^2 & + & Cx & + \\
& & & + & (-A)x^2 & + & (-B)x & + & (-C) + r \\
x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & = & Ax^3 & + & (B - A)x^2 & + & (C - B)x & + & r - C
\end{array}$$

Vänsterled och högerled är lika för *alla* x när följande är uppfyllt

lika 3-gradstermer	1	$=$	A	$\rightarrow$	A	$=$	1
lika 2-gradstermer	-2	$=$	$B-A$	$\rightarrow$	B	$=$	-1
lika 1-gradstermer	-5	$=$	$C-B$	$\rightarrow$	C	$=$	-6
lika konstanta termer	6	$=$	$-C+r$	$\rightarrow$	r	$=$	0

Vi har alltså fått resultatet

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$$

Resultatet stämmer med restsatsen eftersom $f(1)=0$

$$f(1)=1^3-2\cdot 1^2-5\cdot 1+6=0$$

Exempel 3.

Dela polynomet $f(x)=x^5+x^4+3x^3+2x^2+2x+9$ med x^2+2x+3.
Vi ska dela ett polynom av graden 5 med ett polynom av graden 2 och ansätter därför ett polynom av grad 3 och resttermen är ett polynom av 1:a grad. Resttermens gradtal är alltid en grad mindre än divisorns/nämnarens grad.

$$(x^2+2x+3)(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+Ex+F=$$

$$\begin{aligned}
Ax^5+\ Bx^4+\ \ Cx^3+\ \ Dx^2&+\\
2Ax^4+2Bx^3+2Cx^2+2Dx&+\\
3Ax^3+3Bx^2+3Cx+3D&+\\
Ex+\ \ F&=
\end{aligned}$$

$$\underbrace{A}_{1}x^5+(\underbrace{B+2A}_{1})x^4+(\underbrace{C+2B+3A}_{3})x^3+$$
$$(\underbrace{D+2C+3B}_{2})x^2+(\underbrace{2D+3C+E}_{2})x+(\underbrace{3D+F}_{9})$$

lika 5-gradstermer	$A=1$	ger	$A=1$
lika 4-gradstermer	$B+2A=1$	ger	$B=-1$
lika 3-gradstermer	$C+2B+3A=3$	ger	$C=2$
lika 2-gradstermer	$D+2C+3B=2$	ger	$D=1$
lika 1-gradstermer	$2D+3C+E=2$	ger	$E=-6$
lika konstanta termer	$3D+F=9$	ger	$F=6$

Svar Kvoten blir x^3-x^2+2x+1 och resttermen är $-6x+6$.

Algebrans fundamentalsats

Den tyske matematikern Carl Friedrich Gauss (1777–1866) räknas till en av de främsta matematikerna genom tiderna. År 1799 presenterade han fyra olika bevis för följande sats.

> Varje algebraisk ekvation
> $$f(z) = z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_n$$
> där koefficienterna a_k är komplexa tal och $n > 0$, har minst en rot z.

Denna sats brukar kallas för *algebrans fundamentalsats* trots att den egentligen inte hör till algebran utan till den matematiska analysen. Vår lärobok ger inget bevis för satsen av naturliga skäl. Det krävs ungefär två till tre terminers studier på högskolenivå för att kunna läsa ett bevis av satsen.

En konsekvens av satsen är att varje polynom $f(z) = z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_n$ med komplexa koefficienter a_k har exakt n rötter.