UNDER ARBETE

Innehåll

Förord

Denna PDF är ett förtydligande och en utveckling till avsnittet om asymptoter i gymnasieläroboken Matematik 5000. Framställningen är inspirerad av läroboken Robert A. Adams, *Calculus: a complete course*.

© G Robertsson 2016

Asymptoter

Asymptoter är räta linjer som är en approximativ beskrivning av grafen till funktionen $f(x)$ på långa avstånd från origo. Vertikala (lodräta) linjer beskrivs med $x = a$. Alla övriga linjer beskrivs med $y = k\,x + m$. Det finns tre sorters asymptoter, vertikala, horisontella och sneda. När grafen till $f(x)$, för stora avstånd från origo, närmar sig en rät linje kallas linjen för asymptot till funktionen. Detta kan uttryckas med matematiska symboler och limesbegreppet.

Vertikal (lodrät) asymptot

En vertikal asymptot är en rät linje, $x = a$, som funktionens graf närmar sig då $x \to a+$ eller då $x \to a-$. Med $x \to a+$ menas att x närmar sig a från höger sida och med $x \to a-$ menas att x närmar sig a från vänster sida. Fyra möjligheter finns

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty,$$

och/eller

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty.$$

Horisontell (vågrät) asymptot

En horisontell asymptot är en rät linje, $y = b$, som funktionens graf närmar sig då $x \to +\infty$ eller då $x \to -\infty$. Två möjligheter finns

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b,$$

och/eller

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Sned asymptot

En sned asymptot är en rät linje, $y = kx + m$, som funktionens graf närmar sig då $x \to +\infty$ eller då $x \to -\infty$. Två möjligheter finns

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (kx + m) = 0$$

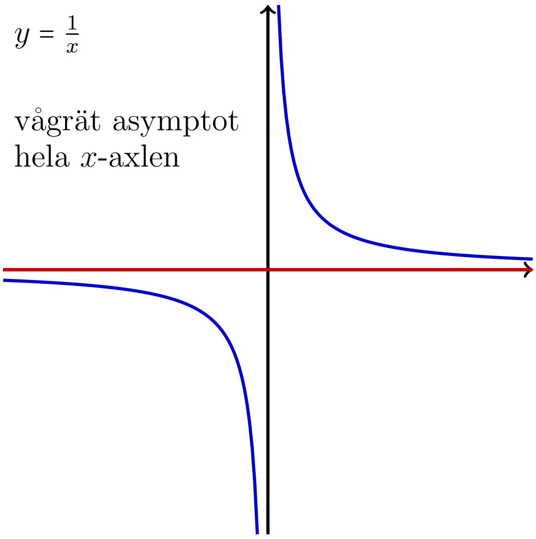
eller

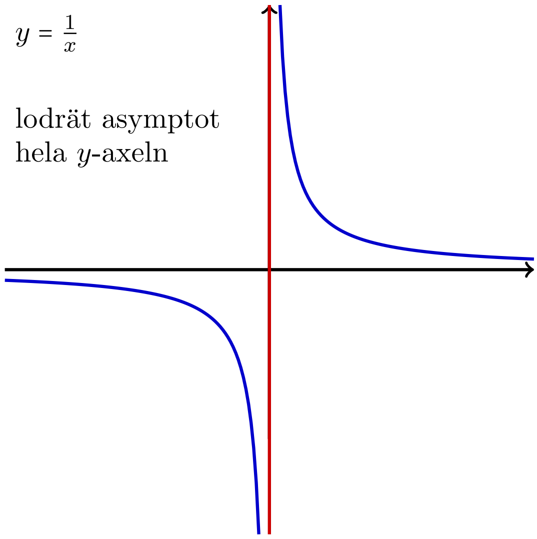
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (kx + m) = 0.$$

Exempel på olika asymptoter

Funktionen $y = \dfrac{1}{x}$

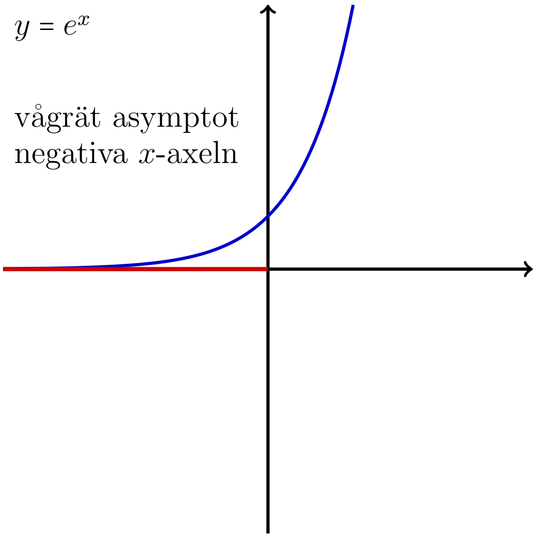
Funktionen $y = \frac{1}{x}$ har positiva x-axeln som asymptot då $x \to +\infty$ och negativa x-axeln som asymptot då $x \to -\infty$. Funktionen är inte definierad då $x = 0$ och har positiva y-axeln som asymptot då $x \to 0+$ och negativa y-axeln som asymptot då $x \to 0-$.

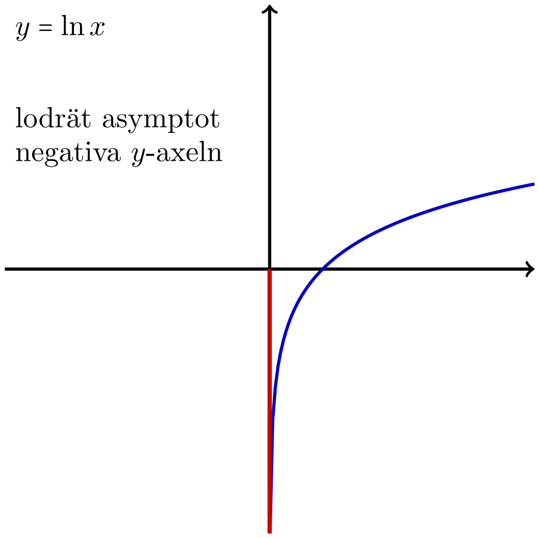




Funktionerna $y = e^x$ och $y = \ln x$

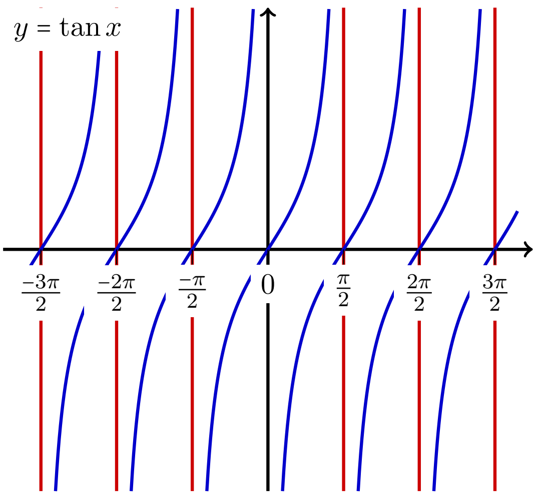
Funktionen $y = e^x$ har negativa x-axeln som asymptot då $x \to -\infty$. Notera att $e^x > 0$ för alla x. Då $x \to +\infty$ saknas asymptot. Inversen till e^x är $\ln x$. Logaritmfunktionen $\ln x$ har negativa y-axeln som asymptot. Logaritmfunktionen $\ln x$ är icke definierad för $x \leq 0$.

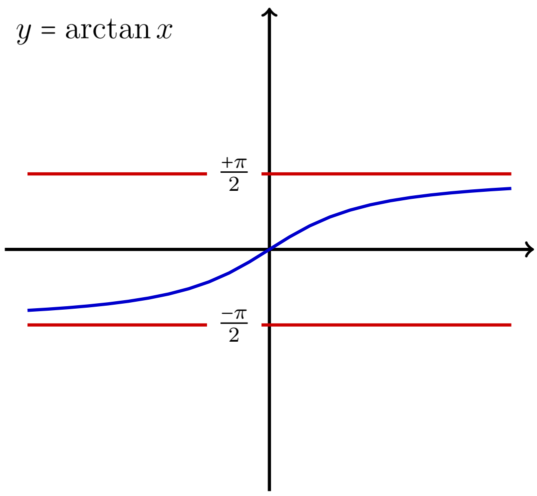




Funktionerna $y = \tan x$ och $y = \arctan x$

Tangensfunktionen har oändligt antal vertikala (lodräta) asymptoter. Avståndet mellan asymptoterna är $\frac{\pi}{2}$. Inversfunktionen har två asymptoter.





Exempel sned asymptot

Undersök eventuella asymptoter och skissa kurvan till

$$f(x) = \frac{x^2+2}{2x}.$$

Skriv om funktionen till

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

Det finns olika möjligheter att hitta asymptoter.

Alternativ 1

vertikal — Är funktionen $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ definierad för alla x? Termen $\frac{1}{x}$ är ej definierad för $x = 0$. Funktionen har alltså en vertikal asymptot för $x = 0$.

horisontell — Kontrollera om $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x}{2} + \frac{1}{x})$ eller $\lim_{x\to-\infty}(\frac{x}{2} + \frac{1}{x})$ är ändlig. Gränsvärdet för första termen x är inte ändligt. Alltså saknas horisontell asymptot.

sned — Studera funktionen

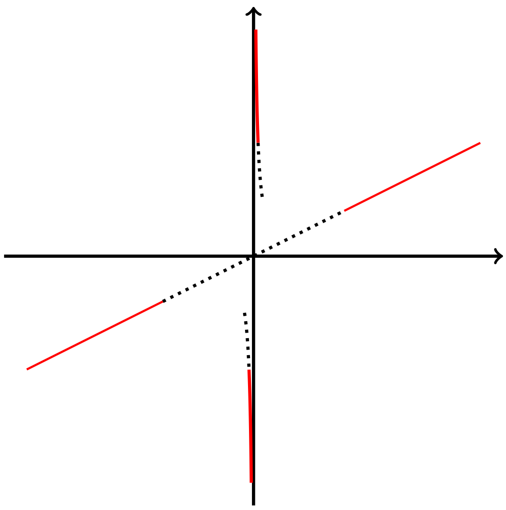
$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

då $x \to \pm\infty$. Andra termen i funktionen går mot noll och

$$f(x) \approx \frac{x}{2}$$

vilket är en rät linje. Linjen $y = \frac{x}{2}$ är alltså en asymptot.

Rita först in asymptoterna i koordinatsystemet. Asymptoterna är en beskrivning av funktionen långt bort från origo. Grafisk ser asymptoterna ut på följande sätt.



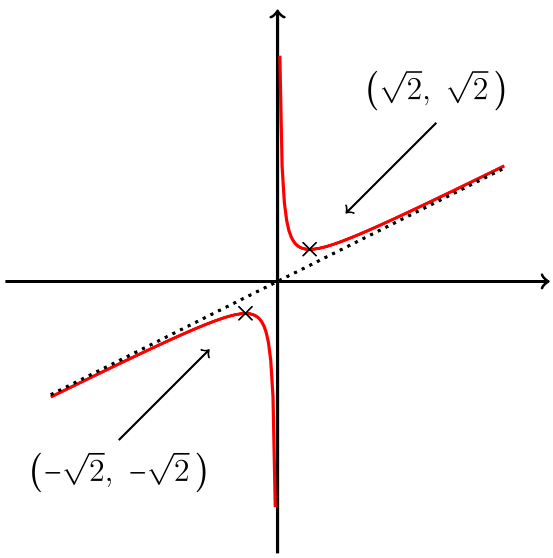
En relevant fråga är hur funktionen ser ut i närheten av origo. Bestäm funktionens max- och min-värden.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \\
f'(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \\
f''(x) &= \frac{2}{x^3}
\end{aligned}
$$

Lös ekvationen $f'(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \\
x_1 &= +\sqrt{2} \\
x_2 &= -\sqrt{2} \\
f(\sqrt{2}) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\
f''(\sqrt{2}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} > 0
\end{aligned}
$$

Punkten $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ är min-punkt. På motsvarande sätt är punkten $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ max-punkt. Markera de två extremvärderna. Rita kurvan.



Alternativ 2

Vertikal och horisontell asymptot kollas som tidigare. Här visas en alternativ möjlighet att bestämma sneda asymptoter. Linjen $y = kx + m$ är asymptot till $f(x)$ när ett eller båda av gränsvärderna är noll.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx+m)) &= 0 \\ \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (kx+m)) &= 0 \end{aligned}$$

Detta betyder att parametrarna k och m i sneda linjen kan bestämmas ur gränsvärderna

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \\ k &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k\,x)\,. \\ m &= \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k\,x)\,. \end{aligned}$$

Med

$$f(x) = \frac{x^2+2}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

får vi

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Med k känd kan m beräknas enligt

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Linjen $y = \dfrac{x}{2}$ är en sned asymptot.

Kommentar De tre olika fallen kan sammanfattas.

vertikal (lodrät) Nämnaren har ett eller flera nollställen. Exempel:

$$\frac{1}{x-1}$$

Linjen $x = 1$ är vertikal asymptot.

horisontell (vertikal) 1/ Nämnarens gradtal är större täljarens. Exempel.

$$\frac{x}{x^2+1} \longrightarrow 0 \qquad \text{då} \qquad x \longrightarrow \pm\infty$$

Linjen $y = 0$ (x-axeln) är asymptot.

2/ Nämnarens och täljarens gradtal är lika, en linjen $y \neq 0$ är asymptot

$$\frac{x^2}{x^2+1} \longrightarrow 1 \qquad \text{då} \qquad x \longrightarrow \pm\infty$$

Linjen $y = 1$ är asymptot.

sned Nämnarens gradtal är exakt ett mindre än täljarens gradtal. Exempel:

$$\frac{3\,x^2+2}{x+1} = \frac{3\,x^2+3x-3x+2}{x+1} = 3\,x + \frac{-3x+2}{x+1} = 3x + \frac{-3+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\frac{3\,x^2+2}{x+1} \longrightarrow (\underbrace{3x-3}_{\text{asymptot}}) \qquad \text{då} \qquad x \longrightarrow \pm\infty$$

Linjen $y = 3x - 3$ är en sned asymptot.