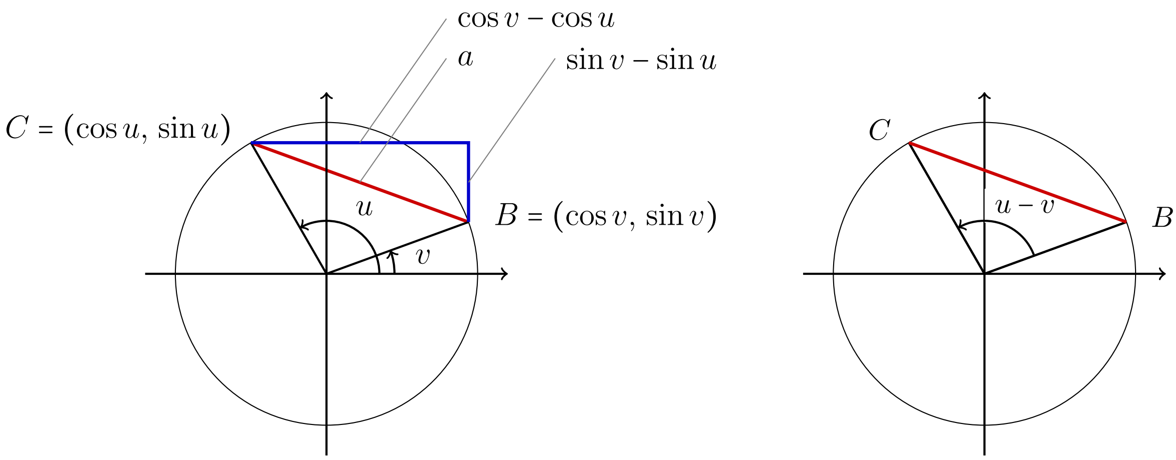
Innehåll

Cosinus och sinus för summa och skillnad av vinklar

Härledning av formel för $\cos(u - v)$

Välj två punkter B och C på randen till enhetscirkeln. Inför vinklarna v och u enligt figurerna nedan. Beräkna avståndet mellan punkterna B och C på två olika sätt.



Pythagoras sats (avståndsformeln) ger

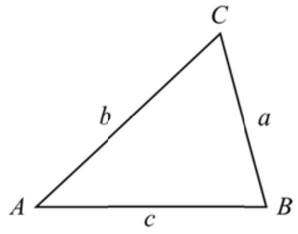
$$\begin{aligned}
a^2 &= (\cos v - \cos u)^2 + (\sin v - \sin u)^2 \\
a^2 &= \cos^2 v + \cos^2 u - 2\,\cos v \cos u + \sin^2 v + \sin^2 u - 2\,\sin v \sin u \\
a^2 &= \underbrace{\cos^2 v + \sin^2 v}_{1} + \underbrace{\cos^2 u + \sin^2 u}_{1} - 2\,\cos v \cos u - 2\,\sin v \sin u
\end{aligned}$$

I FORMELSAMLINGEN finns cosinussatsen.

Sinussatsen $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Areasatsen $T = \frac{ab\sin C}{2}$



Cosinussatsen ger

$$a^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos(u-v)$$

De två sätten att beräkna avståndet mellan B och C ger samma avstånd. Vi får

$$\begin{aligned} -2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos(u-v) &= -2\cos v\cos u - 2\sin v\sin u \\ \cos(u-v) &= \cos u\cos v + \sin u\sin v. \qquad (1) \end{aligned}$$

VSV (vilket skulle visas)

Härledning av formel för $\cos(v+u)$

Byt v mot $-v$ i ekvation (1)

$$\cos(u - \overbrace{v}^{-v}) = \cos u\cos\overbrace{v}^{-v} + \sin u\sin\overbrace{v}^{-v}.$$

En funktion $f(x)$ är jämn om $f(-x) = f(x)$ och udda om $f(-x) = -f(x)$.
Cosinusfunktionen är en jämn funktion och sinusfunktionen är udda,

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos(-x) \\ \sin x &= -\sin(-x). \\ \underbrace{\cos(u-(-v))}_{\cos(u+v)} &= \cos u\,\underbrace{\cos(-v)}_{\cos v} + \sin u\,\underbrace{\sin(-v)}_{-\sin v} \\ \cos(u+v) &= \cos u\,\cos v - \sin u\,\sin v \qquad (2) \end{aligned}$$

VSV

Härledning av formel för $\sin(v+u)$

Följande två samband gäller alltid för sinus och cosinus

$$\begin{aligned} \cos v &= \sin(90^\circ - v) \\ \sin v &= \cos(90^\circ - v). \end{aligned}$$

Använd formel (1) och byt v mot $90^\circ - v$.

$$\begin{aligned}
\cos(u - \overbrace{v}^{90^\circ - v}) &= \cos u \cos \overbrace{v}^{90^\circ - v} + \sin u \sin \overbrace{v}^{90^\circ - v} \\
\underbrace{\cos(u + v - 90^\circ)}_{\sin(u+v)} &= \cos u \underbrace{\cos(90^\circ - v)}_{\sin v} + \sin u \underbrace{\sin(90^\circ - v)}_{\cos v} \\
\sin(u+v) &= \cos u \sin v + \sin u \cos v. \qquad (3)
\end{aligned}$$

VSV

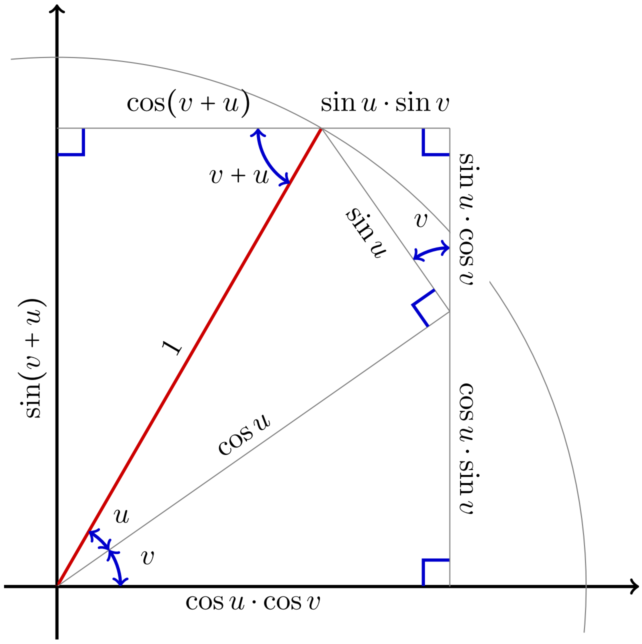
Härledning av formel för $\sin(v - u)$

Använd formel (3) och byt u mot $-u$.

$$\begin{aligned}
\sin(v + \overbrace{u}^{-u}) &= \cos u \sin v + \sin u \cos v \\
\sin(v - u) &= \cos \overbrace{u}^{-u} \sin v + \sin \overbrace{u}^{-u} \cos v \\
\sin(v - u) &= \cos u \sin v - \sin u \cos v. \qquad (4)
\end{aligned}$$

VSV

Härledning av additionssatser ur figur



Ur vågräta avstånd kommer likheten

$$\cos(v+u) = \cos v \cdot \cos u - \sin v \cdot \sin u$$

och ur lodräta avstånd kommer likheten

$$\sin(v+u) = \cos v \cdot \sin u + \sin v \cdot \cos u.$$

Härledning med komplexa tal

Enligt Eulers formel gäller att

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v.$$

Då gäller att

$$\begin{aligned} e^{i(v+u)} &= e^{iv}\, e^{iu}. \\ \cos(v+u) + i\,\sin(v+u) &= (\cos v + i \sin v)\,(\cos u + i \sin u) \\ &= \cos v \cdot \cos u + \cos v \cdot i \cdot \sin u + i \cdot \sin v \cdot \cos u + \underbrace{i^2}_{i^2=-1} \cdot \sin v \cdot \sin u \\ &= (\cos v\ \cos u - \sin v\ \sin u) + i\,(\sin v\ \cos u + \cos v\ \sin u) \end{aligned}$$

Lika realdel ger

$$\cos(u+v) = \cos v\ \cos u - \sin v\ \sin u$$

och lika imaginärdel ger

$$\sin(v+u) = \sin v\ \cos u + \cos v\ \sin u.$$