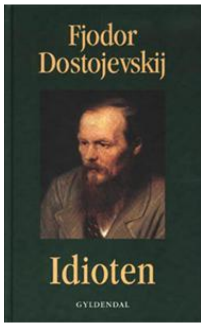
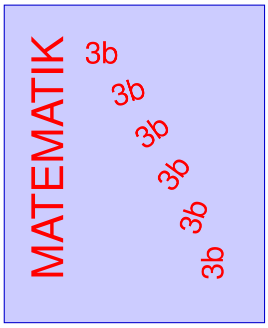
Lille Bo läser och optimerar

Lille Bo fick sin önskeroman i julklapp[a]. När han lagt sig på kvällen beslutar han sig för att läsa i precis 3 timmar. Romanen läser han ut på 2 timmar och så finns ju den fina boken Matematik 3b som räcker länge och faktiskt ger 50% högre läsupplevelse jämfört med romanen. Hur skall han fördela timmarna mellan böckerna för att maximera sin läsupplevelse?





[a]Problemet är hämtat och modifierat ur en lysande utmärkt universitetstext om linjär optimering av Bertil Nilsson.

Lösningsförslag

Antag att han läser t_r timmar i romanen och t_m timmar i matematikboken så har vi efter att uttryckt problemtexten med matematiska formler att maximal tillgänglig lästid är 3 timmar. Det ger att

$$t_r + t_m \leq 3. \tag{1}$$

Romanen räcker i 2 timmar ger att

$$t_r \leq 2. \tag{2}$$

Negativ lästid befattar vi oss inte med. Det ger att

$$t_r \geq 0 \tag{3}$$

och

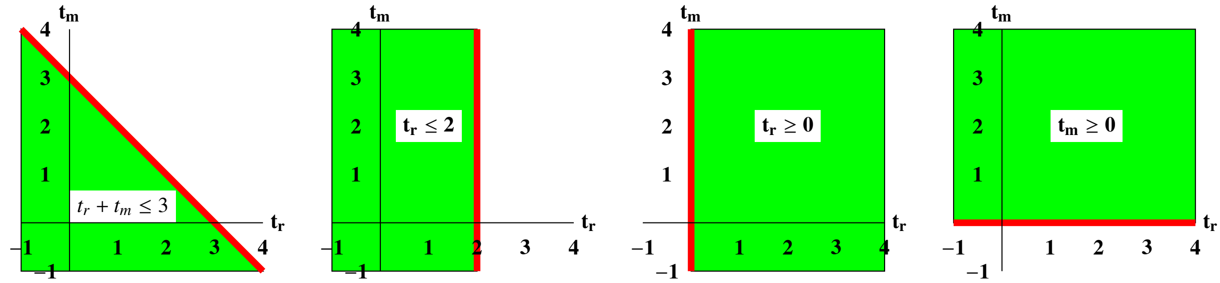
$$t_m \geq 0. \tag{4}$$

Nu vill Bo maximera sin läsupplevelse. Eftersom denna är proportionell mot lästiderna och den fina boken Matematik 3b ger 50% högre läsupplevelse har han att maximera den sammanlagda läsupplevelsen $t_r + 1{,}5\, t_m$. Vi har alltså ett optimeringsproblem. Funktionen

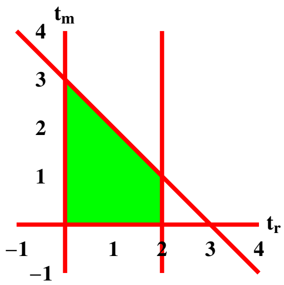
$$f(t_r, t_m) = t_r + 1{,}5\, t_m \tag{5}$$

som skall maximeras kallas måltfunktion. Funktionen har två variabler, tiderna t_r och t_m kallas designvariabler. Nu kan inte tiderna väljas hur som helst utan begränsas av villkoren (1) – (4) ovan. Dessa kallas då för bivillkor.

Eftersom bivillkoren är linjära kommer de var och en att dela upp vår värld i två halvor, en otillåten och en tillåten att vistas i. Snitttet eller skärningen mellan de tillåtna halvorna, det vill säga den mängd som tillhör alla bivillkor, kallas tillåtet område. Det är i detta område vi kan och ska söka lösningen! Nu är det bara två (design)variabler i detta exempel så vi kan enkelt återge varje bivillkor grafiskt. Vi ser att världen delas in i en icke tillåten del och en grön tillåten. Den röda gränslinjen får man genom att rita den räta linje som erhålles då olikheten byts mot likhet.



Genom att så till slut ta snittet av dem alla får vi det tillåtna området där vi ska söka lösningen!



Vi ser att det tillåtna området är begränsat, det vill säga det omsluts av bivillkorslinjerna. Skärningspunkterna mellan bivillkorslinjerna kallas hörnpunkter till det tillåtna området. Tre olika fall kan inträffa när vi löser ett linjärt optimeringsproblem.

- Det tillåtna området är begränsat. Då antar målfunktionen både ett maximum och ett minimum och detta antas i hörn i det tillåtna området. (Fallet ovan.)
- Det tillåtna området är obegränsat. Då finns fortfarande möjligheten att målfunktionen antar ett maximum eller ett minimum, om så görs detta också i ett hörn.
- Det tillåtna området är tomt. Då saknar problemet lösning. Detta betyder att kraven, bivillkoren, tillsammans är orimliga.

Detta ger oss en enkel strategi för att lösa ett linjärt optimeringsproblem! Inspektera alla hörnpunkter till det tillåtna området och beräkna målfunktionens värde där, sedan är det bara att bland dessa välja den optimala lösningen.
Lille Bo har ett begränsat område och vi gör en tabell över alla hörnpunkter.

t_r	t_m	$f(t_r, t_m)$	
0	0	0	
2	0	2	
2	1	3,5	
0	3	4,5	$\Leftarrow$ maximal läsupplevelse ♡ ♥ ♡

Lille Bo ska med andra ord ägna all tillgänglig lästid åt boken Matematik 3b... .