Ekvationssystem med många obekanta

Substitutionsmetoden är enkel att använda för ekvationssystem med två obekanta. Med tre eller fler obekanta blir substitutionsmetoden ohanterlig. Då krävs en alternativ metod. I det följande demonstreras en alternativ metod.

Inledande exempel

Lös följande ekvationssystem med 6 obekanta.

Sex okända x, y, z, u, v, w. Lös w.

$$
\begin{aligned}
x - 2\cdot y + 2\cdot z - 4\cdot u + 5\cdot v - 2\cdot w &= 0 && (6)\\
-2\cdot y + 4\cdot z - 3\cdot u + 5\cdot v - 1\cdot w &= 15 && (5)\\
3\cdot z + 1\cdot u - 4\cdot v + 2\cdot w &= 5 && (4)\\
u - 2\cdot v + 5\cdot w &= 24 && (3)\\
2\cdot v - w &= 4 && (2)\\
6\cdot w &= 36 && (1)
\end{aligned}
$$

Sista ekvationen är (1) som ger $w = \dfrac{36}{6} = 6$

Fem okända x, y, z, u, v. En känd $w = 6$. Lös v.

Använd det kända $w = 6$.

$$
\begin{aligned}
x - 2\cdot y + 2\cdot z - 4\cdot u + 5\cdot v - 2\cdot 6 &= 0\\
-2\cdot y + 4\cdot z - 3\cdot u + 5\cdot v - 6 &= 15\\
3\cdot z + 1\cdot u - 4\cdot v + 2\cdot 6 &= 5\\
u - 2\cdot v + 5\cdot 6 &= 24\\
2\cdot v - 6 &= 4 && (2)
\end{aligned}
$$

Sista ekvationen är nu (2) som ger $v = \dfrac{4+6}{2} = 5$

Fyra okända x, y, z, u. Två kända $w = 6$, $v = 5$. Lös u.

Använd de kända $w = 6$ och $v = 5$.

$$
\begin{aligned}
x - 2\cdot y + 2\cdot z - 4\cdot u + 5\cdot 5 - 2\cdot 6 &= 0\\
-2\cdot y + 4\cdot z - 3\cdot u + 5\cdot 5 - 6 &= 15\\
3\cdot z + 1\cdot u - 4\cdot 5 + 2\cdot 6 &= 5\\
u - 2\cdot 5 + 5\cdot 6 &= 24 && (3)
\end{aligned}
$$

Sista ekvationen är nu (3) som ger $u = 24 - 30 + 10 = 4$

Tre okända x, y, z. Tre kända $w = 6$, $v = 5$, $u = 4$. Lös z.

Använd de kända $w = 6$, $v = 5$ och $u = 4$.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
x & -2\cdot y & +2\cdot z & -4\cdot 4 & +5\cdot 5 & -2\cdot 6 = & 0 \\
 & -2\cdot y & +4\cdot z & -3\cdot 4 & +5\cdot 5 & -6 = & 15 \\
 & & 3\cdot z & +1\cdot 4 & -4\cdot 5 & +2\cdot 6 = & 5
\end{array} \tag{4}
$$

Sista ekvationen är nu (4) som ger $z = \dfrac{5 - 12 + 20 - 4}{3} = 3$

Två okända x, y. Fyra kända $w = 6$, $v = 5$, $u = 4$, $z = 3$. Lös y.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
x & -2\cdot y & +2\cdot 3 & -4\cdot 4 & +5\cdot 5 & -2\cdot 6 = & 0 \\
 & -2\cdot y & +4\cdot 3 & -3\cdot 4 & +5\cdot 5 & -6 = & 15
\end{array} \tag{5}
$$

Sista ekvationen är nu (5) som ger $y = \dfrac{15 + 6 - 25 + 12 - 12}{-2} = 2$

En okänd x. Fem kända $w = 6$, $v = 5$, $u = 4$, $z = 3$, $y = 2$ Lös x.

$$
x \; -2\cdot y \; +2\cdot 3 \; -4\cdot 4 \; +5\cdot 5 \; -2\cdot 6 = 0 \tag{6}
$$

Enda kvarvarande ekvationen är nu (6) som ger $x = 0 + 12 - 25 + 16 - 6 + 4 = 1$

Svar Lösningen är $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $u = 4$, $v = 5$ och $w = 6$.

Kommentar Ekvationssystemet var extremt lätt att lösa vilket beror på att systemet är triangulärt. Den räkneprocedur vi genomfört kallas *bakåtsubstitution*. Den metod läroboken kallar *additionsmetoden* kan användas för att skapa ett triangulärt system. Ett vanligare namn på additionsmetoden är *Gausselimination*.

Gauss elimination och bakåtsubstitution.

Gausselimination och bakåtsubstitution är ett systematiskt sätt att lösa ekvationssystem med många obekanta. Här demonstreras metoden på ett exempel med 3 obekanta. Metoden går ut på att skapa ett triangulärt ekvationssystem som är lätt att lösa med bakåtsubstitution.

Gauss elimination

Vi ska presentera Gauss eliminationsmetod genom att demonstrera hur metoden fungerar på ett system av tre ekvationer med tre obekanta. De tre ekvationer vi vill lösa ser ut på följande sätt.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & - & w & = & 6 \\ 4u & + & v & & & = & 6 \\ 6u & - & 7v & - & 6w & = & 4 \end{array}$$

I det allra första steget eliminerar vi koefficienten 4 framför u i den mellersta ekvationen. Detta gör vi genom att subtrahera en lämplig multipel av den översta ekvationen från den andra ekvationen. Denna operation förändrar inte lösningen till systemet. Dividera koefficienten 4 framför u i mellersta ekvationen med koefficienten 2 framför u i översta ekvationen, kvoten blir $4/2 = 2$. Multiplicera den översta ekvationen med kvoten 2, ekvationen blir då:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4u & + & 2v & - & 2w & = & 12 \end{array}$$

Vi får nu följande tre ekvationer om denna ekvation subtraheras från den mellersta ekvationen.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & - & w & = & 6 \\ & - & v & + & 2w & = & -6 \\ 6u & - & 7v & - & 6w & = & 4 \end{array}$$

Ekvationen i översta och nedersta raden blir kvar utan ändring. Nu upprepar vi proceduren och eliminerar koefficenten 6 framför u i nedersta raden. Kvoten blir nu $6/2 = 3$. Multiplicera den översta ekvationen med 3 och subtrahera från den nedersta ekvationen. De tre ekvationerna blir nu.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & - & w & = & 6 \\ & - & v & + & 2w & = & -6 \\ & - & 10v & - & 3w & = & -14 \end{array}$$

Vi har nu eliminerat koefficienten för u i mellersta och nedersta raden. Det återstår att eliminera koefficienten -10 för v i nedersta nedersta ekvationen. Detta gör vi med hjälp av den mellersta ekvationen. Dividera koefficienten för v i nedersta ekvationen med koefficienten för v i mellersta ekvationen. Kvoten blir alltså $\frac{-10}{-1} = 10$. Vi multiplicerar mellersta ekvationen med 10 och subtraherar från nedersta ekvationen. De tre ekvationerna blir nu:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\,u & + & v & - & w & = & 6 \\ & - & v & + & 2\,w & = & -6 \\ & & & - & 23\,w & = & 46 \end{array}$$

Vi kallar denna matris för triangulär eller mer precis övre triangulär form. Gausseliminationen är nu klar och ekvationssystemet kan enkelt lösas med bakåtsubstitution.

Bakåtsubstitution.

Den nedersta ekvationen är lätt att lösa

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2\,u & + & v & - & w & = & 6 & \\ & - & 1\,v & + & 2\,w & = & -6 & \\ & & & - & 23\,w & = & 46 & \qquad \text{ger } w = -2 \end{array}$$

Utnyttja att $w = -2$. Ur den mellersta av de tre ekvationerna kan v nu lösas.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2\,u & + & v & - & w & = & 6 & \\ & - & 1\,v & + & 2\,w & = & -6 & \qquad \text{med } w = -2 \text{ blir } v = 2 \\ & & & - & 23\,w & = & 46 & \end{array}$$

I det sista steget löser vi slutligen u när $w = -2$ och $v = 2$.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2\,u & + & v & - & w & = & 6 & \qquad \text{med } w = -2,\ v = 2 \text{ blir } u = 1 \\ & - & 1\,v & - & 2\,w & = & -6 & \\ & & & - & 23\,w & = & 43 & \end{array}$$

Svar Lösningen blir nu $u = 1$, $v = 2$ och $w = -2$.

Kommentar Kontrollera slutligen lösningen

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\cdot(1) & + & (2) & - & (-2) & = & 6 \\ 4\cdot(1) & + & (2) & & & = & 6 \\ 6\cdot(1) & - & 7\cdot(2) & - & 6\cdot(-2) & = & 4 \end{array}$$

vilket stämmer.