Innehåll

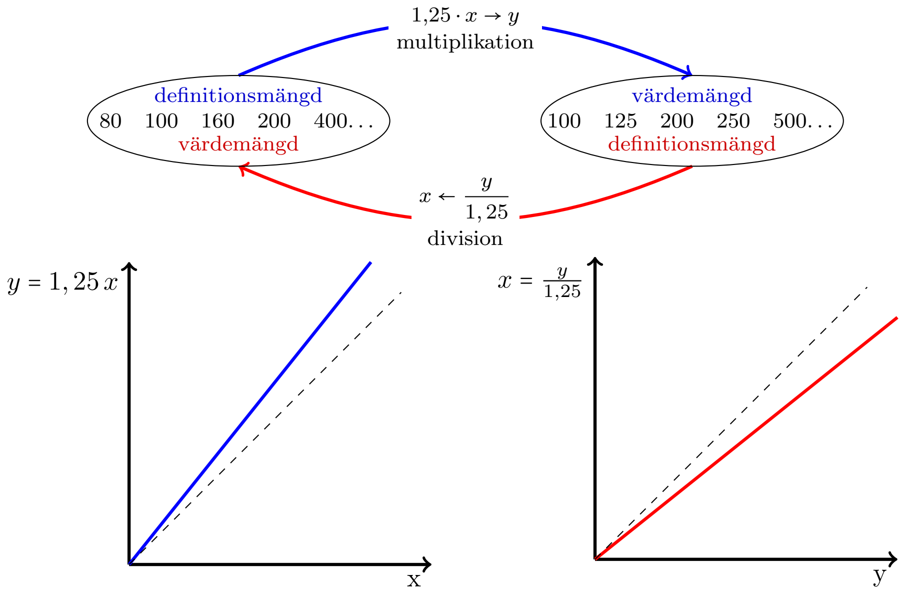
Förord

Denna PDF är avsedd att vara en utvidgning och ett förtydligande till lärobokens avsnitt om logaritmer. Logaritmer är nödvändiga för att lösa den viktiga exponentialekvationen. För Kursen Ma2b ingår sidan 1 till 11. Ma2c bör läsa hela stencilen.

Funktioner och inverser

Dessa sidor är skrivna med fokus på exponentialfunktionen och dess invers logaritmfunktionen. Logaritmfunktionen är nödvändig för att lösa den viktiga exponentialekvationen. För att få ett bra matematiskt perspektiv så inleds avsnittet med en presentation av två andra funktioner och deras inverser, multiplikation-division och kvadrering-kvadratrot.

Multiplikation och division

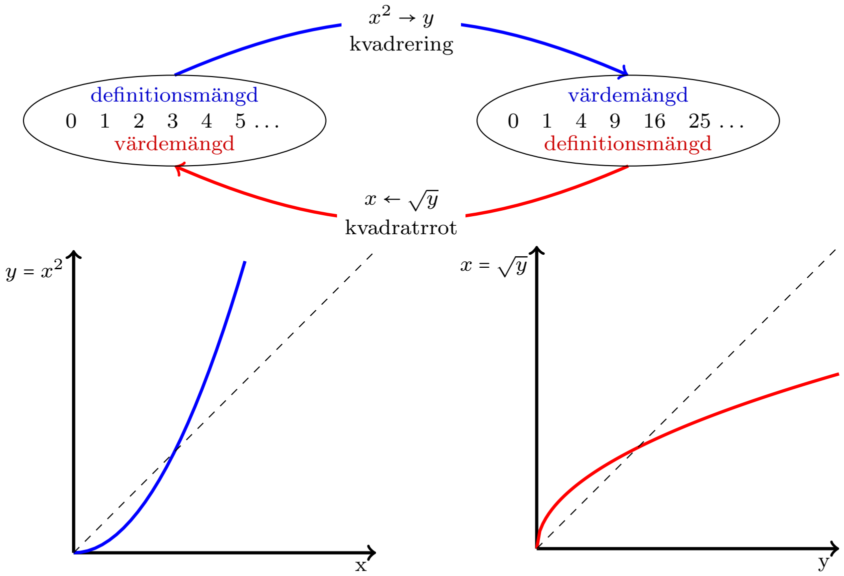


När funktionen är *multiplikation* blir inversfunktion *division*. Omvänt om funktionen är *division* blir inversfunktionen *multiplikation*.

Exempel

För att beräkna pris med moms från ett givet pris utan moms multipliceras det momsfria priset med 1,25. För att beräkna priset utan moms från ett givet pris med moms divideras priset med 1,25. Både multiplikation och division går att beräkna utan räknehjälpmedel.

Kvadrera och kvadratrot

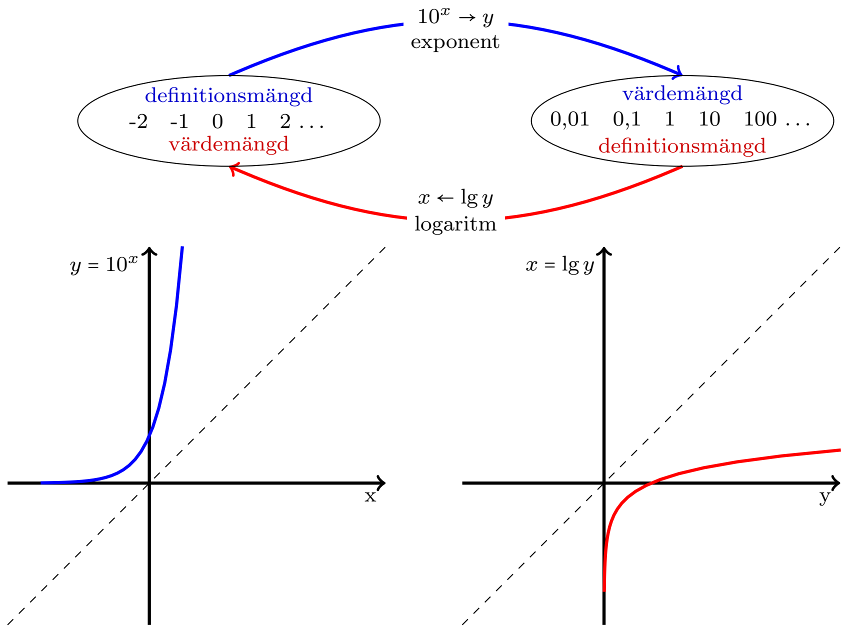


När funktionen är *kvadreing* blir inversfunktion *kvadratrot*. Omvänt om funktionen är *kvadratrot* blir inversfunktionen *kvadrering*.

Exempel

Ytan av en kvadrat beräknas genom att kvadrera sidan. Omvänt används kvadratroten för att beräkna sidan på en kvadrat när ytan är given. Att kvadrera är en operation som enkelt kan utföras utan räknehjälpmedel. Kvadratroten är en operation som ofta kräver räknehjälpmedel. Kvadratroten ur talen 1, 4, 9, ... och ytterligara några tal behöver inga räknehjälpmedel. Kvadratroten ur talen 2, 5, 10, ... och nästan alla andra tal kräver räknehjälpmedel eller historiskt en tabell.

Exponentialfunktion och logaritmfunktion



När funktionen är *exponentialfunktionen* blir inversfunktion *logaritmfunktionen*. Omvänt om funktionen är *logaritmfunktionen* blir inversfunktionen *exponentialfunktionen*.

Bas och exponent

I uttrycket 10^x är 10 bas och x exponent. I likheten $10^x = y$ är x det tal som 10 ska upphöjas till för att få y. Talet x kallas logaritmen för y. Mer precis är x logaritmen med basen 10 för y. Talet x kan vara vilket som helst positivt eller negativt tal. Talet y blir alltid positivt. Vi skriver $x = \lg y$, vanligt i böcker, eller $x = \log y$ vanligt på räknaren.

Exempel

Exponentialfunktionen används för att beskriva tillväxt i olika sammanhang. En befolkning på 50 000 som ökar 2% varje år har förändringsfaktorn 1,02. Efter ett år är befolkningen $50\,000 \cdot 1{,}02 = 51\,000$, efter två år $50\,000 \cdot 1{,}02^2 = 52\,020$ och efter n år är befolkningen $50\,000 \cdot 1{,}02^n$. Om befolkningen minskar med 2% blir förändringsfaktorn 0,98. Exponentialfunktionen kan beskriva både ökning och minskning. Förändringsfaktorn är alltid positiv. Exponentialfunktionen kräver nästan alltid räknehjälpmedel.

En rimlig fråga att ställa är hur lång tid det tar för en befolkning att fördubblas, minska till hälften eller någon annan nivå. För att kunna svara på frågor av denna typ behövs logaritmfunktionen som är inversen till exponentialfunktionen. Logaritmfunktionen kräver också nästan alltid räknehjälpmedel.

Historia

Historiskt infördes logaritmer av John Napier, skotsk matematiker (1550 – 1617). Upptäckten av logaritmer räknas som en av vår kulturs största vetenskapliga bedrifter. Napier ville förenkla arbetskrävande multiplikation, division och lyckades med hjälp av tabeller omvandla räknearbetet till addition och subtraktion.

Senare införde Henry Briggs, engelsk matematiker(1556–1630), logaritmer med basen 10. Tio-logaritmer var fram till moderna datorer vanliga för numeriska beräkningar. Logaritmer med basen 10 brukar betecknas med lg eller log. Förutom logaritmer med basen 10, som ingår i gymnasiets kurs Ma2, förekommer logaritmer med basen e ($e \approx 2.71828\ldots$) och 2.

Logaritmer har haft en stor historisk betydelse då arbetskrävande multiplikationer eller divisioner med hjälp av en tabell över logaritmer kunde omvandlas till enkla additioner och subtraktioner. Billiga elektroniska miniräknare har gjort logaritmer överflödiga vid beräkning av multiplikation och division. Idag ingår logaritmer i matematikundervisning som en nödvändig ingrediens för att lösa exponentialekvationer.

Länkar

Universitetslektor Lars Nystedt har skrivit en trevlig artikel om logaritmernas stora historiska betydelse. Artikel i SvD

Kaiandes Sempler har skrivit om Napier, Briggs och logaritmer i tidskriften Ny Teknik.

På siten NumberPhile finns två inslag om logaritmer, multiplikation med logaritmer och beräkning av logaritmtabeller.

Exponentialekvationen

Exempel 1 Lös exponentialekvationen

$$7 = 3^x.$$

Ekvationen har lösning med x någonstans mellan $x = 1$ och $x = 2$.

x	3^x
1	3
x	7
2	9

Det sökta x är opraktiskt placerat som exponent. För att kunna lösa denna ekvation måste vi använda inversfunktionen till exponentialekvationen. Tag logaritmen för vänster och högerled. Vi får

$$\log 7 = \log 3^x.$$

Här sitter x fortfarande opraktiskt placerat. Använd FORMELSAMLINGEN, där finns en användbar räkneregel för logaritmer.

Logaritmer	$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$	$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$	
	$\lg x + \lg y = \lg xy$	$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$	$\lg x^p = p \cdot \lg x$

$$\log 7 = \log 3^x$$

Det sökta x hoppar ut från logaritmfunktionen och landar på raden framför logaritmfunktionen.

$$\log 7 = x \cdot \log 3$$

Nu är problemet enkelt. Dela bägge sidor med $\log 3$. Exakt svar är

$$x = \frac{\log 7}{\log 3}.$$

För numeriskt svar måste logaritmerna beräknas med miniräknare.
Numeriskt svar är

$$x = \frac{0{,}8441\ldots}{0{,}4771\ldots} \approx 1{,}771$$

Svar exempel 1. Exakt svar $x = \dfrac{\log 7}{\log 3}$ och numeriskt är $x \approx 1{,}771$ vilket ligger mellan förväntade 1 och 2.

Exempel 2 Bakterier växer snabbt. Varje timme ökar antalet bakterier med 30%. Hur lång tid tar det för 100 bakterier att växa till 100 000 bakterier?

Lösning Förändringsfaktorn är 1,3. Efter x timmar har 100 bakterier ökat till

$$100 \cdot 1{,}3^x$$

När är antalet bakterier 100 000? Lös exponentialekvationen

$$100\,000 = 100 \cdot 1{,}3^x.$$

Förenkla ekvationen till

$$1\,000 = 1{,}3^x.$$

Logaritmera ekvationen

$$\log 1000 = \log 1{,}3^x.$$

Använd FORMELSAMLINGEN, där finns en användbar räkneregel för logaritmer.

Logaritmer	$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$	$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$	
	$\lg x + \lg y = \lg xy$	$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$	$\lg x^p = p \cdot \lg x$

Exponenten x hoppar ner på raden framför logaritmfunktionen.

$$\log 1000 = \log 1{,}3^x$$

$$\log 1000 = x \cdot \log 1{,}3$$

som har exakta lösningen

$$\frac{\log 1000}{\log 1{,}3} = x$$

Numeriskt får vi

$$x = \frac{3}{0{,}1139} = 26{,}33$$

Svar exempel 2. Det tar 26 timmar.

Exempel 3 En dator minskar i värde med 20% varje år. Hur lång tid tar det för en dator som kostar 8 000 kronor att minska till halva värdet?

Lösning Förändringsfaktorn är 0,8. Efter x år är värdet

$$8\,000 \cdot 0{,}8^x$$

När är värdet 4 000 kronor? Lös exponentialekvationen

$$4000 = 8000 \cdot 0{,}8^x.$$

Förenkla ekvationen till

$$0{,}5 = 0{,}8^x.$$

Logaritmera ekvationen

$$\log 0{,}5 = \log 0{,}8^x.$$

Använd FORMELSAMLINGEN, där finns en användbar räkneregel för logaritmer.

Logaritmer	$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$	$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$	
	$\lg x + \lg y = \lg xy$	$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$	$\lg x^p = p \cdot \lg x$

Exponenten x hoppar ner på raden framför logaritmfunktionen och vi får

$$\log 0{,}5 = \log 0{,}8^x$$

$$\underbrace{\log 0{,}5}_{-0.3010} = x \cdot \underbrace{\log 0{,}8}_{-0.09691}$$

som har lösningen

$$x = 3{,}11.$$

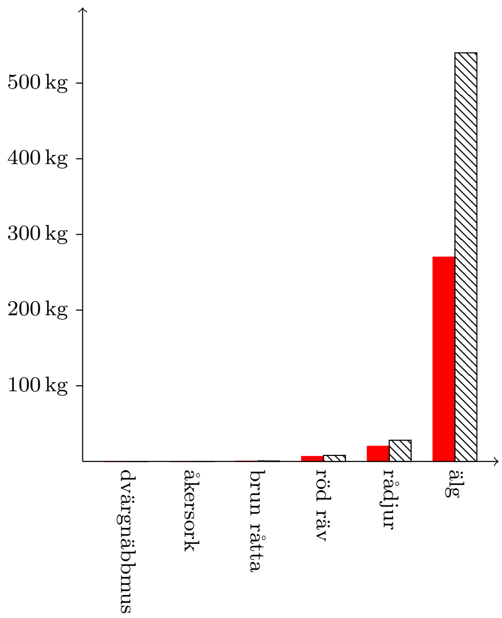
Svar exempel 3. Det tar drygt 3 år.

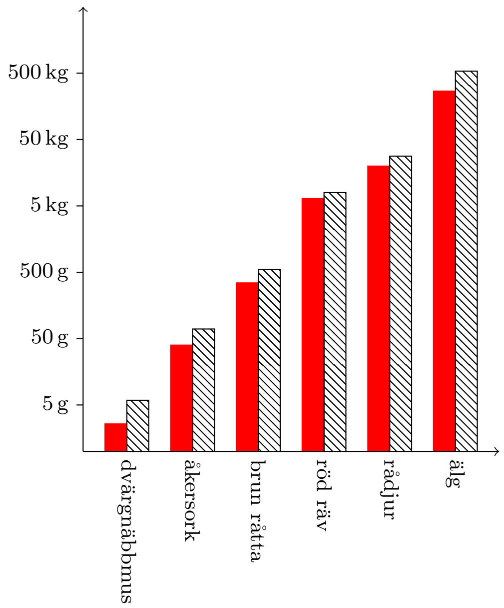
Diagram och logaritmiska skalor

Diagram

Om man i diagram vill presentera data där storleken varierar från mycket litet till mycket stort är logaritmisk skala lämpligare än vanlig linjär skala. Exemplet nedan illustrerar.

dvärgnäbbmus	2,6 – 5,9	g
åkersork	40 – 70	g
brun råtta	350 – 550	g
röd räv	6,5 – 8	kg
rådjur	20 – 28	kg
älg	270 – 540	kg





Med en linjär skala märks nästan ingen skillnad mellan den lilla dvärgnäbbmusen och den mer än 1000 gånger tyngre rödräven. För exempel av denna typ är logaritmisk skala lämpligare.

Logaritmiska skalor

Det finns många fenomen där logaritmiska skalor är lämpliga.

Ljud och decibel

Bell [B] och vanligare decibel [dB] är ett logaritmiskt mått. Det används för att ange ett förhållande till ett referensvärde och definieras enligt

$$\mathrm{B} = \log\left(\frac{\text{effekt}}{\text{referensvärde}}\right).$$

Prefixet d (deci) betyder tiondel

$$\mathrm{dB} = 10 \cdot \log\left(\frac{\text{effekt}}{\text{referensvärde}}\right).$$

Decibel används ofta för att beskriva ljudnivå och nivå på andra signaler.
En ökning med 10 dB (1 Bell) innebär en ökning med en faktor 10 av effekten.
En ökning med 20 dB (2 Bell) innebär en ökning med en faktor $10 \times 10 = 100$ av effekten.
En ökning med 30 dB (3 Bell) innebär en ökning med en faktor $10 \times 10 \times 10 = 1000$ av effekten.

Jordbävningar och Richterskalan

Richterskalan är en skala som används för att ange styrkan hos jordbävningar. Skalan är en logaritmisk skala där varje steg motsvarar en ökning av magnituden (skakningen) med 10 gånger.

Vätejonkoncentration och pH

pH är ett logaritmiskt mått på surhet, det vill säga på koncentrationen (aktiviteten) av vätejoner (H+) i en lösning. Lösningar med låga pH-värden är sura, och de med höga kallas basiska. Lösningar som har pH 7 kallas neutrala. Vatten har vätejonkoncentration 10^{-7} mol/dm^3. pH-värdet är logaritmen för vätejonkoncentrationen med omvänt tecken.

Astronomi och magnitudskalan

Magnitudskalan som används i astronomi är en logaritmisk skala och ett kvantitativt mått på ljusflödet som kommer från en stjärna. Skalan skapades för 2500 år sedan av den grekiska astronomen Hipparkos och används fortfarande. Himlens ljusstarkaste stjärna har magnituden 1 och den svagaste som går att se med blotta ögat har magnituden 6. En stjärna av 6:e magnituden är 100 gånger svagare än en av 1:a magnituden. Skalan är logaritmisk och överensstämmer med hur ögat uppfattar skillnader i ljusstyrka.

Basen i astronomiska magnitudskalan är $\sqrt[5]{100}$ ($\approx 2{,}512$) då 5 steg svarar mot faktorn 100.

Räkneregler för exponenter och logaritmer

I FORMELSAMLINGEN finns räkneregler för både potenser och logaritmer. Räknereglerna liknar varandra.

Logaritmer	$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$	$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$		
	$\lg x + \lg y = \lg xy$	$\lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$	$\lg x^p = p \cdot \lg x$	

Potenser	$a^x a^y = a^{x+y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$(a^x)^y = a^{xy}$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
	$a^x b^x = (ab)^x$	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a^0 = 1$

Logaritmer och multiplikation, division

Här följer 5 exempel på hur logaritmer kan användas vid multiplikation av tal.

Exempel 1. Beräkna 10×100 med hjälp av logaritmer. För exemplet behövs följande tabell med 10-logaritmer.

tal decimalform	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000
tal potensform	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4
logaritm	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

Diagrammet sammanfattar hur beräkningen utförs.

$$\begin{array}{ccccc}
10 & \times & 100 & = & 1000 \\
10^1 & \times & 10^2 & = & 10^3 \\
\downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\
\log 10 & + & \log 100 & = & \log(10 \cdot 100) \\
1 & + & 2 & = & 3
\end{array}$$

Steg	Utför
1	bestäm logaritmen för 10 och 100 från tabellen
	$\log 10 = 1$ och $\log 100 = 2$
2	addera logaritmerna
	logaritmen för produkten är $1 + 2 = 3$
3	kontrollera vilket tal som svarar mot logaritmen
	logaritmen 3 svarar mot 1 000

Svar exempel 1 $10 \times 100 = 1000$

Exempel 2. Beräkna 2×3 med hjälp av logaritmer. För exemplet behövs en tabell med 10-logaritmer.

tal	1	2	3	4	5	6	7	8	9
potens	$10^{0,0000}$	$10^{0,3010}$	$10^{0,4771}$	$10^{0,6021}$	$10^{0,6990}$	$10^{0,7782}$	$10^{0,8451}$	$10^{0,9031}$	$10^{0,9542}$
logaritm	0,0000	0,3010	0,4771	0,6021	0,6990	0,7782	0,8451	0,9031	0,9542

Diagrammet sammanfattar hur beräkningen utförs.

$$\begin{array}{ccccc}
2 & \times & 3 & = & 6 \\
10^{0,3010} & \times & 10^{0,4771} & = & 10^{0,7781} \\
\downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\
\log 2 & + & \log 3 & = & \log(2 \cdot 3) \\
0{,}3010 & + & 0{,}4771 & = & 0{,}7781
\end{array}$$

Steg	Utför
1	bestäm logaritmen för 2 och 3 från tabellen
	$\log 2 = 0{,}3010$ och $\log 3 = 0{,}4771$
2	addera logaritmerna
	logaritmen för produkten är $0{,}3010 + 0{,}4771 = 0{,}7781$
3	kontrollera vilket tal som svarar mot logaritmen
	logaritmen 0,7781 svarar mot nästan exakt mot 6.

Svar exempel 2 $2 \times 3 = 6$

Exempel 3. Beräkna 4×5 med hjälp av logaritmer.

Steg	Utför
1	bestäm logaritmen för 4 och 5 från tabellen
	$\log 4 = 0{,}6021$ och $\log 5 = 0{,}6990$
2	addera logaritmerna
	logaritmen för produkten är $0{,}6021 + 0{,}6990 = 1{,}3011$
	$1{,}3011 = 1 + 0{,}3011$
3	kontrollera vilket tal som svarar mot logaritmerna
	logaritmen 1 svarar exakt mot 10 och 0,3011 svarar nästan exakt mot 2.
	resultatet blir $10 \times 2 = 20$.

Svar exempel 3 $4 \times 5 = 20$

Exempel 4. Beräkna $\dfrac{6}{2}$ med hjälp av logaritmer. För exemplet behövs en tabell med 10-logaritmer.

tal	1	2	3	4	5	6	7	8	9
potens	$10^{0,0000}$	$10^{0,3010}$	$10^{0,4771}$	$10^{0,6021}$	$10^{0,6990}$	$10^{0,7782}$	$10^{0,8451}$	$10^{0,9031}$	$10^{0,9542}$
logaritm	0,0000	0,3010	0,4771	0,6021	0,6990	0,7782	0,8451	0,9031	0,9542

Diagrammet sammanfattar hur beräkningen utförs.

$$
\begin{array}{ccccc}
6 & \div & 2 & = & 3 \\
10^{0,7782} & - & 10^{0,3010} & = & 10^{0,4771} \\
\downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\
\log 6 & - & \log 2 & = & \log(6 \div 2) \\
0{,}7782 & - & 0{,}3010 & = & 0{,}4772
\end{array}
$$

Steg	Utför
1	bestäm logaritmen för 6 och 2 från tabellen
	$\log 6 = 0{,}7782$ och $\log 2 = 0{,}3010$
2	beräkna skillnaden av logaritmerna
	logaritmen för kvoten är $0{,}7782 - 0{,}3010 = 0{,}4772$
3	kontrollera vilket tal som svarar mot logaritmen
	logaritmen 0,4772 svarar nästan exakt mot 3.

Svar exempel 4. $\dfrac{6}{2} = 3$

Exempel 5. Beräkna

$$\frac{3{,}14 \times 23{,}4 \times 187}{34{,}5 \times 9{,}34}$$

med hjälp av logaritmer. Denna begreppsmässigt enkla beräkning är arbetskrävande att utföra för hand. Med logaritmer är det enkelt att beräkna ett approximativt värde.
Diagrammet sammanfattar hur beräkningen utförs.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 3{,}14 & \times & 23{,}4 & \times & 187 & \div & 34{,}5 & \div & 9{,}34 & = & 42{,}6 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ 0{,}4969 & + & 1{,}3692 & + & 2{,}2718 & - & 1{,}5378 & - & 0{,}9703 & = & 1{,}6298 \end{array}$$

Steg	Utför
1	bestäm logaritmen för talen med hjälp av tabellen på sidorna 16–17
2	addera och subtrahera logaritmerna
	logaritmen för resultatet blir 1,6298
3	kontrollera vilket tal som svarar mot logaritmen
	logaritmen 1,6298 uppfattas som $1 + 0{,}6298$
	0,6298 svarar nästan exakt mot 4,26 och 1 svarar mot en faktor 10.

Svar exempel 5. $\dfrac{3{,}14 \times 23{,}4 \times 187}{34{,}5 \times 9{,}34} \approx 42{,}6$

Kommentar Tabellen på sidorna 16–17 är 4-ställiga. Detta betyder att logaritmerna är beräknade med 4 siffror. För bättre noggrannhet fanns tabeller med fler siffror Vid mitten av 70-talet hade billiga elektroniska minräknare gjort logaritmtabeller överflödiga. Multiplikation och division med hjälp av logaritmtabell är idag överflödig men logaritmer har fortfarande en viktig roll i matematik och vetenskap.

Logaritmtabell

På sidorna 16 och 17 visas en logaritmtabell av den typ som tidigare var vanlig i gymnasieundervisning.

100 – 549

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

550 – 999

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9